

У. А. Шылінец,

кандыдат фізіка-матэматычных навук,  
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;

Ж.С. Топаль,

студэнтка V курса матэматычнага факультэта БДПУ

## РАШЭННЕ АДНОЙ КАНАНІЧНАЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ПРЫ ДАПАМОЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

**Уводзіны.** Разгледзім бікамплесныя лікі  $a + bj$  ( $j^2 = -1$ ), прычым  $a$  і  $b$  з'яўляюцца не толькі рэчаіснымі, але і любымі камплеснымі лікамі. Модуль бікамплеснага ліку  $a + bj$  вызначым роўнасцю выгляду

$$|a + bj| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \geq 0,$$

адкуль  $|a| \leq |a + bj|$ ,  $|b| \leq |a + bj|$ , і для любых двух бікамплесных лікаў  $\alpha$  і  $\beta$  маем  $|\alpha \cdot \beta| \leq l |\alpha| \cdot |\beta|$ , дзе  $l \geq 1$  [1, 2]. У далейшым праз  $l$  абазначаем толькі гэтую канстанту.

Няхай  $C^2(D)$  ( $C^2(D, B)$ ) – клас рэчаісных або камплесных (бікамплесных) дважды непарыўна дыферэнцавальных у абсягу  $D$  функцый ад  $x, y$ . Абазначаем у далейшым праз  $A(p, q, D, B)$  ( $A(p, q, D, K)$ ) клас усіх бікамплесных (камплесных) функцый ад  $x, y$ , аналітычных ад  $p$  і  $q$  у абсягу  $D$ , дзе  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$  – дадзеныя функцыі класа  $C^2(D)$ , прычым  $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$  у абсягу  $D$ .

Абсяг  $D$  лічым заўсёды адназвязнай.

Мяркуем

$$P = p + jq, Q = p - jq.$$

Маем

$$P'_x Q'_y - P'_y Q'_x = -2j\delta.$$

Увядзем дыферэнцыяльныя аператары:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{1}{\delta} (f'_x q'_y - f'_y q'_x), \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{\delta} (f'_y p'_x - f'_x p'_y), \\ \frac{\partial f}{\partial P} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial p} - j \frac{\partial f}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial p} + j \frac{\partial f}{\partial q} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

дзе  $f$  – любая функцыя класа  $C^2(D)$  (хаця б рэчаісная) або класа  $C^2(D, B)$ ,  $P = p + jq$ ,  $Q = p - jq$ ,  $j^2 = -1$ ,  $i^2 = -1$ ,  $j \neq i$ .

Дыферэнцыяльныя аператары  $\frac{\partial}{\partial P}$ ,  $\frac{\partial}{\partial Q}$  валодаюць наступнымі

ўласцівасцямі:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial Q}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial P} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial Q} = 1; \\ 2) \quad & \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial P} = u \frac{\partial v}{\partial P} + v \frac{\partial u}{\partial P}, \quad \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial Q} = u \frac{\partial v}{\partial Q} + v \frac{\partial u}{\partial Q}; \\ 3) \quad & \frac{\partial(f + j\varphi)}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} \right) \right\}. \end{aligned}$$

**Лема1.** Калі ў абсягу  $D$  маем адначасова

$$\frac{\partial f}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = 0,$$

тады  $f \equiv const$  (паколькі з (1) маем:  $f'_x = f'_y = 0$  у абсягу  $D$ ).

Заўважым, што ва ўсім далейшым літарамі  $p, q, P, Q$  абазначаем толькі разглядаемыя тут функцыі.

Будзем пісаць, што  $f(x, y) = f[p]$  у абсягу  $D$ , калі функцыя  $f(x, y)$  з'яўляецца манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарова па функцыі  $p(x, y)$  [1, 2] у абсягу  $D$  (F-манагеннай), г. зн. калі знойдзецца такая функцыя зменных  $x, y$ , якую абазначаем  $f'[p]$ , што ў адзначаным абсягу маем:

$$f'_x = f'[p] \cdot p'_x, \quad f'_y = f'[p] \cdot p'_y$$

(з умовы  $\delta \neq 0$  вынікае адзінасць функцыі  $f'[p]$  для дадзеных функцый  $f$  і  $p$ ). Напрыклад, але не заўсёды абавязкова, функцыя  $f[p]$  ёсць аналітычная функцыя камплекснага зменнага  $p$ .

Аналагічна абазначаем праз  $F[P]$  для бікамплекснай функцыі  $F(x, y) = f(x, y) + j\varphi(x, y)$ , дзе  $f, \varphi \in C^2(D)$ , такую бікамплексную функцыю, якая манагенная па функцыі  $P(x, y) = p(x, y) + jq(x, y)$  (у сэнсе У.С.Фёдарова) у абсягу  $D$ .

У працы [3] даказана наступная тэарэма.

**Тэарэма 1.** Неабходная і дастатковая прымета манагеннасці бікамплекснай функцыі  $F(x, y) = f(x, y) + j\varphi(x, y)$  па функцыі  $P(x, y) = p(x, y) + jq(x, y)$  у абсягу  $D$  мае выгляд  $\frac{\partial F}{\partial Q} = 0$ ,  $(x, y) \in D$ .

У працы [3] даказана таксама, што ўсякая бікамплексная функцыя  $F$ ,  $F$ -манагенная па бікамплекснай функцыі  $P$ , мае наступны выгляд:

$$F = \frac{u[\bar{z}] + v[z]}{2} + j \frac{i(u[\bar{z}] - v[z])}{2},$$

дзе  $u[\bar{z}]$  ( $v[z]$ ) – любая камплексная функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарова па функцыі  $\bar{z} = p - iq$  ( $z = p + iq$ ).

Прадметам нашага даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = a_1 f + b_1 \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} = a_2 f + b_2 \varphi, \quad (2)$$

дзе шуканыя функцыі  $f$ ,  $\varphi$  і вядомыя функцыі  $a_k$ ,  $b_k$  ( $k = 1, 2$ ) – аналітычныя функцыі ад  $p = p(x, y)$  і  $q = q(x, y)$  у абсягу  $D$ .

Далей заўважым, што даследаванні рашэнняў сістэмы (2) маюць строга лакальны характар, а таму можам, не памяншаючы, па сутнасці, агульнасці даследавання, дапусціць раскладальнасць любой разглядаемай

намі функцыі  $F(x, y)$  класа  $A(p, q, D, B)$  ва ўсім абсягу  $\bar{D}$  у шэраг выгляду:

$$F(M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(M) Q^n(M) \quad (3)$$

( $a_{mn} = const$ ;  $M$  – пункт адназвязнага абсягу  $D$  плоскасці  $x, y$ ), прычым мяркуецца існаванне такіх канстантаў  $r_1 > 0, r_2 > 0$ , што

$$1) |P| < r_1, |Q| < r_2 \text{ у абсягу } D,$$

$$2) \sum_{m, n=0}^{\infty} |a_{mn}| r_1^m r_2^n l^{m+n} < +\infty,$$

а таму у абсягу  $D$  збягаецца абсалютна і раўнамерна шэраг

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(M)$$

для любых зменных пунктаў  $M, N \in D$  (бо

$$|P^m(N) Q^n(M)| < l^{m+n-1} r_1^m r_2^n).$$

**Асноўная частка.** Для даследавання сістэмы (2) пабудуем і вывучым спецыяльныя інтэгральныя аператары. Уводзім усюды ў далейшым абазначэнні:

$$1) \tilde{F}(N, M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(M), \quad M, N \in D, \text{ у выпадку}$$

раскладу (3),

$$2) P(B) \equiv P_1, \quad P(N) \equiv P_0, \quad Q(B) \equiv Q_1, \quad Q(N) \equiv Q_0, \quad P(M) \equiv P, \\ Q(M) \equiv Q$$

(захоўваючы, аднак, запіс адзначаных пунктаў там, дзе гэта будзе да месца).

Ступеневыя шэрагі, якія атрымліваюцца з шэрагу (3) заменай  $P$  праз  $P - a$ ,  $Q$  праз  $Q - b$ , дзе  $a, b = const$ , намі асобна не разглядаюцца, бо, калі ўзяць  $P - a$  ( $Q - b$ ) за новыя  $P$  ( $Q$ ), мы атрымаем тыя ж формулы і тэарэмы.

Пяройдзем зараз да вывучэння некаторых крывалінейных інтэгралаў, мяркуючы заўсёды, што падынтэгральныя функцыі належаць класу  $A(p, q, D, B)$ .

Няхай

$$\varphi \equiv \varphi(B) = \int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M), n = 1, 2, \dots,$$

дзе тут і ніжэй  $\int_{M_0}^B$  абазначае крывалінейны інтэграл, узяты па кускова-гладкай крывой, якая злучае пункты  $M_0$  і  $B(x_0, y_0)$  у абсягу  $D$ ,  $dQ(M) \equiv Q'_x dx + Q'_y dy$ .

Пад знакам інтэграла маем:

$$Q^n \cdot dQ(M) = Q^n \cdot Q'_x \cdot dx + Q^n \cdot Q'_y \cdot dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q^n Q'_y = n Q^{n-1} \cdot Q'_x \cdot Q'_y + Q^n \cdot Q''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Q^n Q'_x = n Q^{n-1} \cdot Q'_y \cdot Q'_x + Q^n \cdot Q''_{xy},$$

адкуль вынікае, што  $Q^n \cdot dQ$  ёсць поўны дыферэнцыял па  $x$  і  $y$ .

Адсюль атрымліваем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = Q^n(B) \frac{\partial Q(B)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = Q^n(B) \frac{\partial Q(B)}{\partial y_0},$$

а таму знойдзем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial x_0} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Q_1} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - \frac{\partial P_1}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right) = Q^n(B)$$

$$\left( \delta = \delta(B) = \begin{vmatrix} P'_x(B) & P'_y(B) \\ Q'_x(B) & Q'_y(B) \end{vmatrix} \right).$$

**Лема 2.** Маем:

$$1) \frac{\partial}{\partial P_1} \left( \int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) \right) = 0,$$

$$2) \frac{\partial}{\partial Q_1} \left( \int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) \right) = Q^n(B).$$

**Лема 3.** Маем:

$$\int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) = \frac{Q^{n+1}(B) - Q^{n+1}(M_0)}{n+1}.$$

**Доказ.** Згодна з лемай 2 маем:

$$\frac{\partial}{\partial Q_1} \left( \int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) - \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1} \right) = 0.$$

Адсюль

$$\int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) - \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1} = F[P(B)],$$

дзе  $F[P(B)]$  –  $F$ -манагенная па  $P$  функцыя.

Згодна з лемай 2 і ўлічваючы, што  $\frac{\partial Q(B)}{\partial P_1} = 0$ , маем

$$\frac{\partial}{\partial P_1} F[P(B)] = 0.$$

З апошняй роўнасці і з таго, што  $\frac{\partial}{\partial Q_1} F[P(B)] = 0$ , на падставе

лемы 1 атрымаем

$$F[P(B)] = C = \text{const}.$$

Такім чынам,

$$\int_{M_0}^B Q^n(M) dQ(M) = \frac{Q^{n+1}(B)}{n+1} + C,$$

а пры супадзенні пункта  $B$  з пунктам  $M_0$  маем:

$$0 = \frac{Q^{n+1}(M_0)}{n+1} + C.$$

Адсюль атрымліваем сцвярджэнне лемы 3.

Няхай  $N$  і  $B$  – два любыя пункты абсягу  $D$ , прычым  $N$  не залежыць ад  $B$ , і няхай

$$I(N, B) = \int_{M_0}^B \tilde{F} dQ(M),$$

дзе  $M_0$  – фіксаваны пункт абсягу  $D$ ,  $M = M(x, y)$ ,  $\tilde{F} = \tilde{F}(N, M)$ ,

$$F(x, y) \in A(p, q, D, B), F(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m Q^n, P = P(x, y),$$

$$Q = Q(x, y),$$

$$\tilde{F}(N, M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) Q^n(x, y),$$

$$dQ(M) = Q'_x(x, y) dx + Q'_y(x, y) dy.$$

Маем

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{F} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{F} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{Але } \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P} = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) \frac{\partial Q^n}{\partial P} = 0, \text{ адкуль}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{F} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} + \tilde{F} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}.$$

Аналагічна атрымаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} + \tilde{F} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}.$$

Такім чынам, атрымаем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{F} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{F} \frac{\partial Q}{\partial y} \right),$$

а, значыць,

$$\tilde{F}(N, M) dQ(M) \equiv \tilde{F}(N, M) Q'_x dx + \tilde{F}(N, M) Q'_y dy$$

ёсць поўны дыферэнцыял па  $x$  і  $y$ .

Такім чынам, для любой функцыі  $F(x, y) \in A(p, q, D, B)$  інтэграл  $I(N, B)$  не залежыць ад крывой інтэгравання (ёсць функцыя (адназначная) пунктаў  $N$  і  $B$ ).

Адсюль, мяркуючы  $B \equiv B(x_0, y_0)$ ,  $I \equiv I(N, B)$ , маем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial Q(B)} &= \frac{1}{\delta} \left\{ \frac{\partial I}{\partial y_0} P'_y(B) - \frac{\partial I}{\partial x_0} P'_x(B) \right\} = \\ &= \frac{1}{\delta} \{ P'_x(B) \tilde{F}(N, B) Q'_y(B) - P'_y(B) \tilde{F}(N, B) Q'_x(B) \} = \tilde{F}(N, B). \end{aligned}$$

Такім чынам,

$$\frac{\partial}{\partial Q_1} \left( \int_{M_0}^B \tilde{F}(N, M) dQ(M) \right) = \tilde{F}(N, B).$$

Лічым, што  $N$  не залежыць ад  $B$ . Адсюль атрымаем тэарэму.

**Тэарэма 2.** Няхай  $\alpha, \beta \in A(p, q, D, B)$ ,  $f, \varphi \in A(p, q, D, K)$ , тады:

1) інтэграл

$$I(N, B) \equiv \int_{M_0}^B (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{\varphi}) dQ(M) \equiv \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}(N, M) dQ(M),$$

дзе  $\tilde{\Phi}(N, M) = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}(N, M)$  і т.д., не залежыць ад шляху інтэгравання (ёсць адназначная функцыя пунктаў  $N$  і  $B$ ),

$$2) \frac{\partial I(N, B)}{\partial Q(B)} = \tilde{\alpha}(N, B) \cdot \tilde{f}(N, B) + \tilde{\beta}(N, B) \cdot \tilde{\varphi}(N, B).$$

Лічым, што  $N$  не залежыць ад  $B$ .

**Тэарэма 3.** Няхай  $\alpha, \beta \in A(p, q, D, B)$ ,  $f, \varphi \in A(p, q, D, K)$ .

Тады



1) інтэграл

$$I(B) \equiv \int_{M_0}^B [\tilde{\alpha}(B, M) \cdot \tilde{f}(B, M) + \tilde{\beta}(B, M) \cdot \tilde{\varphi}(B, M)] dQ(M) \text{ не}$$

залежыць ад шляху інтэгравання (ёсць адназначная функцыя пункта  $B$ ),

$$2) \frac{\partial I(B)}{\partial Q(B)} = \alpha(B) \cdot f(B) + \beta(B) \cdot \varphi(B). \quad (4)$$

**Доказ.** Першая частка тэарэмы даказваецца аналагічным чынам, як і ў тэарэме 2. Застаецца даказаць роўнасць (4).

Няхай  $x_0, y_0$  – каардынаты пункта  $B$ . Тады

$$\frac{\partial I(B)}{\partial y_0} = [\alpha(B)f(B) + \beta(B)\varphi(B)] \frac{\partial Q(B)}{\partial y_0} + \int_{M_0}^B \frac{\partial}{\partial y_0} (\tilde{\alpha}\tilde{f} + \tilde{\beta}\tilde{\varphi}) dQ(M),$$

$$\frac{\partial I(B)}{\partial x_0} = [\alpha(B)f(B) + \beta(B)\varphi(B)] \frac{\partial Q(B)}{\partial x_0} + \int_{M_0}^B \frac{\partial}{\partial x_0} (\tilde{\alpha}\tilde{f} + \tilde{\beta}\tilde{\varphi}) dQ(M),$$

адкуль

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(B)}{\partial Q_1} &= \frac{1}{\delta(B)} (I'_y \cdot P'_x - I'_x \cdot P'_y)_B = \\ &= (\alpha \cdot f + \beta \cdot \varphi)_B + \int_{M_0}^B \frac{\partial}{\partial Q_1} (\tilde{\alpha}\tilde{f} + \tilde{\beta}\tilde{\varphi}) dQ(M). \end{aligned} \quad (5)$$

Але

$$\tilde{\alpha}\tilde{f} + \tilde{\beta}\tilde{\varphi} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(B) Q^n(M) \text{ і } \frac{\partial P(B)}{\partial Q(B)} = 0, \frac{\partial Q(M)}{\partial Q(B)} = 0, \text{ бо}$$

$$\frac{\partial Q(M)}{\partial x_0} = 0, \frac{\partial Q(M)}{\partial y_0} = 0.$$

Адсюль і з роўнасці (5) і атрымаем роўнасць (4).

З тэарэмы 3 і ўласцівасцей манагенных функцый вынікае наступная тэарэма.

**Тэарэма 4.** Калі маем роўнасць

$$f(B) + \varphi(B) = \int_{M_0}^B (\tilde{\alpha}(B, M)\tilde{f}(B, M) + \tilde{\beta}(B, M)\tilde{\varphi}(B, M)) dQ(M) + F[P(B)]$$

дзе  $F[P(B)]$  – манагенная па  $P$  функцыя, тады

$$\frac{\partial}{\partial Q_1} (f(B) + j\varphi(B)) = \alpha(B)f(B) + \beta(B)\varphi(B)$$

і наадварот.

**Тэарэма 5.** Няхай у абсягу  $D$

$$\varphi(B) = \int_{M_0}^B \tilde{F}(B, M) dQ(M),$$

тады для ўсіх пар пунктаў  $N, B \in D$

$$\tilde{\varphi}(N, B) = \int_{M_0}^B \tilde{F}(N, M) dQ(M). \quad (6)$$

**Доказ.** Маем

$$\tilde{F}(B, M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(B) Q^n(M).$$

Тады згодна з лемай 3

$$\varphi(B) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(B) \frac{1}{n+1} [Q^{n+1}(B) - Q^{n+1}(M_0)].$$

З другога боку,

$$\int_{M_0}^B \tilde{F}(N, M) dQ(M) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) \frac{1}{n+1} [Q^{n+1}(B) - Q^{n+1}(M_0)],$$

а таксама

$$\tilde{\varphi}(N, B) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} P^m(N) \frac{1}{n+1} [Q^{n+1}(B) - Q^{n+1}(M_0)],$$

адкуль і вынікае (6). Тэарэма даказаная.

**Тэарэма 6.** Няхай  $\alpha, \beta \in A(p, q, D, B)$ ,  $f, \varphi \in A(p, q, D, K)$ . Калі для ўсіх пар  $N, B \in D$

$$\tilde{f}(N, B) + j\tilde{\varphi}(N, B) = \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}(N, M) dQ(M), \quad (7)$$

дзе  $\Phi(x, y) \equiv f(x, y)\alpha(x, y) + \varphi(x, y)\beta(x, y)$ , тады  $f(x, y) \equiv 0$ ,  
 $\varphi(x, y) \equiv 0$ .

**Доказ.** У якім-небудзь замкнутым крузе  $\bar{K} \subset D$  для усіх пунктаў  $M, N, B \in \bar{K}$  маем

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(N, M)| < c, \quad |\tilde{\varphi}(N, M)| < c, \quad |\tilde{\alpha}| < a, \quad |\tilde{\beta}| < a, \quad |Q'_x| < b, \\ |Q'_y| < b \quad (a, b, c - const). \end{aligned}$$

Тады ў крузе  $\bar{K}$  (лічым  $M_0$  цэнтрам гэтага круга) з (7) атрымаем

$$|\tilde{f}(N, B) + j\tilde{\varphi}(N, B)| < 4labcr, \quad r = |\overline{M_0 B}| \quad (8)$$

(паколькі

$$\begin{aligned} & |\tilde{\Phi} dQ(M)| \leq l |\tilde{f}\tilde{\alpha} + \tilde{\varphi}\tilde{\beta}| \cdot |dQ(M)| \leq \\ & \leq l \left( |\tilde{f}||\tilde{\alpha}| + |\tilde{\varphi}||\tilde{\beta}| \right) \left| Q'_x \frac{dx}{ds} + Q'_y \frac{dy}{ds} \right| ds < 2lab c \left( \left| \frac{dx}{ds} \right| + \left| \frac{dy}{ds} \right| \right) ds, \end{aligned}$$

і праінтэграваўшы апошні выраз па прамалінейнаму адрэзку ад  $M_0$  да  $B$  і

ўлічваючы, што  $\left| \frac{dx}{ds} \right| + \left| \frac{dy}{ds} \right| < 2$ , атрымаем няроўнасць (8)).

З няроўнасці (8) вынікае

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(N, B)| < 4labcr, \quad |\tilde{\varphi}(N, B)| < 4labcr, \\ |\tilde{f}(N, M)| < 4labcs, \quad |\tilde{\varphi}(N, M)| < 4labcs, \\ (s = |\overline{M_0 M}|). \end{aligned}$$

Калі падставіць атрыманыя ацэнкі ў (7), будзем мець

$$\left. \begin{aligned} & \left| \tilde{f}(N, B) + j\tilde{\varphi}(N, B) \right| < 4^2 \ell^2 a^2 b^2 c \frac{r^2}{2!}, \\ & \left| \tilde{f}(N, B) \right| < 4^2 \ell^2 a^2 b^2 c \frac{r^2}{2!}, \quad \left| \tilde{f}(N, M) \right| < 4^2 \ell^2 a^2 b^2 c \frac{s^2}{2!} \\ & (s = |\overline{M_0 M}|) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(аналагічныя ацэнкі маюць месца для  $\tilde{\varphi}(N, B)$ ,  $\tilde{\varphi}(N, M)$ ) і, наогул, працягваючы працэс падстаноўкі няроўнасцей тыпу (9) у (7), атрымаем

$$|\tilde{f}(N, B)| < 4^n l^n a^n b^n c \frac{r^n}{n!}, |\tilde{\varphi}(N, B)| < 4^n l^n a^n b^n c \frac{r^n}{n!}. \quad (10)$$

Няхай выконваюцца няроўнасці (10), тады з (7) маем:

$$|\tilde{f}(N, B) + j \tilde{\varphi}(N, B)| < l \int_{M_0}^B (|\tilde{f}| + |\tilde{\varphi}|) 2abds,$$

гэта значыць

$$|\tilde{f}(N, B) + j \tilde{\varphi}(N, B)| < l^{n+1} \cdot 4^{n+1} a^{n+1} b^{n+1} c \frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

г. зн.

$$|\tilde{f}| < l^{n+1} \cdot 4^{n+1} a^{n+1} b^{n+1} c \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}, |\tilde{\varphi}| < l^{n+1} \cdot 4^{n+1} a^{n+1} b^{n+1} c \frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

адкуль, відавочна,  $f(x, y) \equiv 0$ ,  $\varphi(x, y) \equiv 0$ .

Тэарэма даказаная.

З тэарэм 5 і 6 вынікае наступная тэарэма.

**Тэарэма 7.** Калі маем

$$f(B) + j \varphi(B) = \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}(B, M) dQ(M)$$

для ўсіх  $B \in D$ , дзе  $\Phi \equiv \alpha \beta + \beta \varphi$ ;  $\alpha, \beta \in A(p, q, D, B)$ ,

$f, \varphi \in A(p, q, D, K)$ , тады  $f(x, y) \equiv 0$ ,  $\varphi(x, y) \equiv 0$ .

Пабудуем агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + b_1 \varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_2 f + b_2 \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

у тым выпадку, калі ў ёй шуканыя функцыі  $f$  і  $\varphi$  і вядомыя функцыі  $a_k, b_k$  ( $k = 1, 2$ ) – аналітычныя функцыі ад  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$ , што, безумоўна, не патрабуе абавязковай аналітычнасці ўсіх адзначаных функцый ад зменных  $x$  і  $y$ .

З азначэння дыферэнцыяльнага аператара

$$\frac{\partial}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + j \left( \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} \right) \right\}$$

непасрэдна вынікае наступная тэарэма.

**Тэарэма 8.** Сістэма (2), дзе  $a_k, b_k \in A(p, q, D, K)$  ( $k = 1, 2$ ) – вядомыя функцыі,  $f, \varphi \in A(p, q, D, K)$  – шуканыя функцыі, раўназначная раўнанню выгляду

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = \alpha f + \beta \varphi, \quad (11)$$

дзе

$$w = f + j\varphi, \quad \alpha \equiv \frac{1}{2}(a_1 + ja_2), \quad \beta \equiv \frac{1}{2}(b_1 + jb_2).$$

Шукаем рашэнне раўнання (11) у наваколлі некаторага пункта  $M_0 \in D$ .

На падставе тэарэм 1, 3 рашэнне раўнання (11) зводзіцца да рашэння наступнага інтэгральнага раўнання

$$f(B) + j\varphi(B) = \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}(B, M) dQ(M) + F[P(B)], \quad (12)$$

дзе  $F[P(B)]$  – адвольна манагенная па  $P$  функцыя,  $\Phi = \alpha f + \beta \varphi$ , інтэграл бярэцца па прамалінейнаму адрэзку  $M_0B$  даўжынні  $r$ , які размешчаны ў некаторым замкнутым крузе  $\bar{K} \subset D$  з цэнтрам  $M_0$ .

Разгледзім папярэдне наступнае інтэгральнае раўнанне:

$$\tilde{f}(N, B) + j\tilde{\varphi}(N, B) = \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}(N, M) dQ(M) + F[P(B)], \quad (13)$$

дзе  $\Phi = \alpha f + \beta \varphi$ . Раўнанне (13) рэшым метадам паслядоўных набліжэнняў.

Мяркуем

$$\tilde{w}_n(N, B) = \int_{M_0}^B \tilde{\Phi}_{n-1}(N, M) dQ(M) + F[P(B)], \quad (14)$$

дзе  $w_n = f_n + j\varphi_n$ ;  $\Phi_{n-1} = \alpha f_{n-1} + \beta \varphi_{n-1}$ ;  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $f_0 + j\varphi_0 = F[P(B)]$  – манагенная па  $P$  функцыя;  $f_n, \varphi_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) – камплексныя функцыі ад  $x, y$ .

Калі ўвесці абазначэнні

$$\Delta w_n = w_n - w_{n-1}, \quad \Delta \Phi_{n-1} = \Phi_{n-1} - \Phi_{n-2} = \alpha \Delta f_{n-1} + \beta \Delta \varphi_{n-1},$$

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1}, \quad \Delta \varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1},$$

то з раўнання (14) будзем мець

$$\Delta \tilde{w}_n(N, B) = \int_{M_0}^B \Delta \tilde{\Phi}_{n-1}(N, M) dQ(M),$$

адкуль знаходзім, што

$$|\Delta \tilde{f}_n(N, B)| \leq l \int_0^r |\Delta \tilde{\Phi}_{n-1}(N, M)| dQ(M) = l \int_0^r |\Delta \tilde{\Phi}_{n-1}(N, M)| \left| \frac{dQ}{ds} \right| ds, \quad (15)$$

$$|\Delta \tilde{\varphi}(N, B)| \leq l \int_0^r |\Delta \tilde{\Phi}_{n-1}(N, M)| \left| \frac{dQ}{ds} \right| ds,$$

$$(s = |\overline{M_0 M}|),$$

дзе інтэграл бярэцца па прамалінейнаму адрэзку  $\overline{M_0 B}$  даўжыні  $r$ , які належыць некатораму замкнутому кругу  $\overline{K} \subset D$  з цэнтрам у пункце  $M_0$ .

Відавочна, што маюцца такія канстанты  $a > 0, b > 0$ , што для ўсіх пар пунктаў  $N, B$  гэтага круга  $|\Delta \tilde{\Phi}_1(N, B)| < a, |\tilde{\alpha}(N, B)| < a, |\tilde{\beta}(N, B)| < a$ , і для ўсіх пунктаў  $M$  адрэзка  $\overline{M_0 B}$   $\left| \frac{dQ}{ds} \right| < b$ .

Тады з (15), відавочна, маем

$$|\Delta \tilde{f}_n(N, B)| < 2^{n-2} (lab)^{n-1} \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n=2, 3, \dots$$

Аналагічна для  $|\Delta \tilde{\varphi}(N, B)|$ .

Такім чынам, у крузе  $\overline{K}$  абсалютна і раўнамерна збягаецца шэраг  $\sum_{n=2}^{\infty} \Delta \tilde{f}_n(N, B)$  для ўсіх пар пунктаў  $N$  і  $B$  гэтага круга (аналогічна пры замене  $f_n$  праз  $\varphi_n$ ), а таму паслядоўнасці  $\{\tilde{f}_n(N, B)\}$  і  $\{\tilde{\varphi}_n(N, B)\}$  збягаюцца раўнамерна для ўсіх пар пунктаў  $N, B \in \overline{K}$ . Калі абазначыць ліміты гэтых паслядоўнасцяў праз  $\tilde{f}(N, B)$  і  $\tilde{\varphi}(N, B)$  адпаведна, то будзем мець з (14)

$$\tilde{f}(N, B) + j\tilde{\varphi}(N, B) = \int_{M_0}^B [\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{\varphi}] dQ(M) + F[P(B)], \quad (16)$$

дзе пад інтэгралам  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(N, M)$ ,  $\tilde{f} = \tilde{f}(N, M)$  і г.д.

Такім чынам, мы знайшлі рашэнне інтэгральнага раўнання (16):

$$\tilde{f}(N, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(N, B), \quad \tilde{\varphi}(N, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_n(N, B).$$

Гэтае рашэнне для дадзенай функцыі  $F[P(B)]$  згодна з тэарэмай 7 будзе адзіным.

Адсюль вынікае, што і інтэгральнае раўнанне

$$f(B) + j\varphi(B) = \int_{M_0}^B [\tilde{\alpha} \cdot \tilde{f} + \tilde{\beta} \cdot \tilde{\varphi}] dQ(M) + F[P(B)]$$

мае рашэнне ў абсягу  $D$ , і яно адзінае для дадзенай функцыі  $F[P(B)]$ .

**Заклучэнне.** Такім чынам, задача інтэгравання раўнання (11) цалкам рэшана. Аналагічна рашаюцца неаднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні выгляду (11).

### ***ЛИТАРАТУРА***

1. Фёдоров, В.С. Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика.– 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. Фёдоров, В.С. Об одном виде моногенных гиперкомплексных функций / В.С. Фёдоров // Математический сборник.– 1960.– Т. 50.– № 1.– С. 101–105.
3. Стельмашук, Н.Т. О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н.Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика.–1964.– №3.– С. 136–142.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



**УДК 517.95**

***Шылінец У.А., Топаль Ж.С. Рашэнне адной кананічнай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў пры дапамозе F-манагенных функцый // Весці БДПУ. Серыя 3. 2014. №2. С. 14–19.***

Пры дапамозе функцый, манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава, знойдзена рашэнне адной кананічнай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў.

Бібліягр.– 3 назвы.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ