$$+\exp\{-2\mu^{-1}t[1+f_2(\mu)]\}[(x_2^\circ-x_1^\circ)\operatorname{colon}[0,1,-1]+$$
$$+g_2(\mu)]+\exp\{-\mu^2 t[1+f_3(\mu)]\}[(x_2^\circ+x_3^\circ)\operatorname{colon}[0,0,1]+g_3(\mu)],$$

е $f_i(\mu)$, $g_i(\mu)$ аналитичны в точке $\mu=0$ и обращаются в этой точке в нуль.

Отметим, что существование и единственность решения задачи (1) при выполнении ловий 1—6 следует из теоремы Тихонова [2]. При $m=2$, $K_2=1$ построенное асимптотическое разложение решения совпадает с асимптотикой [3].

Литература

1. Васильева А. Б. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, 4. С. 611—642.
2. Тихонов А. Н. // Мат. сб. 1952. Т. 31 (73), № 3. С. 575—586.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений нгулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

осковский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 6 марта 1989 г.

ДК 517.925

Г. Е. ПУШКЕВИЧ, А. И. ЯБЛОНСКИЙ

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ ГЕНЕТИКИ

Существует класс генетических моделей, ведущих свое происхождение от моделей тематической экологии вольтерровского типа.

Пусть x, y, z — численности особей трех различных популяций в некоторый момент емени t, следовательно, это функции от t, а законы изменения численности особей каждого да описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4(x+y+z)}(4\psi_{11}x^2+4\psi_{12}xy+\psi_{22}y^2)-x(m_1+\mu_{11}x+\mu_{12}y+\mu_{13}z),$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2(x+y+z)}(2\psi_{21}xy+\psi_{22}y^2+4\psi_{13}xz+2\psi_{23}yz)-y(m_2+\mu_{21}x+\mu_{22}y+\mu_{23}z),\quad(1)$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{4(x+y+z)}(4\psi_{32}yz+\psi_{22}y^2+\psi_{33}z^2)-z(m_3+\mu_{31}x+\mu_{32}y+\mu_{33}z).$$

Эта система представляет собой [1, с. 100—104] уравнения динамики генотипических упп, где ψ_{ij} — коэффициент плодовитости любой пары; μ_{ij} — коэффициент, учитывающий еличение смертности как за счет межвидовой конкуренции или «пожирания» одного да другим $(i\neq j)$, так и за счет внутривидовой конкуренции или каннибализма в пределах ного вида $(i=j)$; m_i — коэффициент естественной смертности; $i, j=1, 2, 3$.

Рассмотрим случай, когда $m_i=m=\text{const}$, $\mu_{ij}=\mu=\text{const}$ для всех $i, j=1, 2, 3$. Относильно же коэффициентов плодовитости ψ_{ij} будем предполагать, что плодовитость любой ры зависит только от генотипа самки. Тогда [1, с. 100—114]

$$\psi_{11}=a,\ \psi_{22}=b,\ \psi_{33}=c,\ \psi_{12}=\psi_{21}=(a+b)/2,\ \psi_{13}=\psi_{31}=(a+c)/2,\ \psi_{23}=\psi_{32}=(b+c)/2.$$

истема (1) в этом случае запишется в виде

$$2(x+y+z)\frac{dx}{dt}=4ax^2+2xy(a+b)+by^2-2x(m+\mu x+\mu y+\mu z)(x+y+z),$$

$$(x+y+z)\frac{dy}{dt}=xy(a+b)+2xz(a+c)+yz(b+c)+by^2-y(m+\mu x+\mu y+\mu z)(x+y+z),\quad(2)$$

$$2(x+y+z)\frac{dz}{dt}=by^2+2yz(b+c)+4cz^2-2z(m+\mu x+\mu y+\mu z)(x+y+z).$$

В рассматриваемой задаче будем полагать a, b, c, m, μ произвольными числами, $\mu\neq0$ и рассматривать систему (2) с точки зрения аналитической теории дифференальных уравнений. А именно установим существование подвижных особых точек в завимости от параметров.

Система (2) является автономной, поэтому подвижной особой точкой может быть обая точка t_0, а ее характер зависит только от значения параметров a, b, c, m, μ. В дальнейшем будем полагать, что $t_0=0$. Точка $t_0=0$ будет особой, если вдоль некоторого пути L, стремящегося к нулю:

$$|x(t)|\to\infty,\ |y(t)|\to\infty,\ |z(t)|\to\infty. \tag{3}$$

Такую точку будем называть подвижной особой точкой с бесконечными начальными условиями.

Замечание 1. Очевидно, что для системы (2) теорема Коши существования и единственности решения нарушается и при $x(t)+y(t)+z(t)\to 0$, когда $t\to t_0$ $(t\to 0)$. Однако этот случай особых начальных условий здесь не рассматривается.

Используя запись системы (2), для простоты исследования удобно ввести функцию $u=x+y+z$. Тогда система (2) запишется в виде

$$\begin{gathered}
2u\frac{dx}{dt}=4ax^2+2xy(a+b)+by^2-2xu(m+\mu u),\\
u\frac{dy}{dt}=xy(a+b)+2xz(a+c)+yz(b+c)+by^2-yu(m+\mu u),\\
2u\frac{dz}{dt}=by^2+2yz(b+c)+4cz^2-2zu(m+\mu u),\\
u\frac{du}{dt}=2u(ax+by+cz)-u^2(m+\mu u),\\
u=x+y+z.
\end{gathered} \tag{4}$$

Решение в окрестности подвижной особой точки будем искать в виде

$$\begin{gathered}
x(t)=t^{n_1}(\alpha_{10}+\varphi_1(t)),\\
y(t)=t^{n_2}(\alpha_{20}+\varphi_2(t)),\\
z(t)=t^{n_3}(\alpha_{30}+\varphi_3(t)),\\
u(t)=t^{n_4}(\alpha_{40}+\varphi_4(t)),
\end{gathered} \tag{5}$$

где n_1, n_2, n_3, n_4 — некоторые числа, причем все они отрицательные, $\alpha_{10}\alpha_{20}\alpha_{30}\alpha_{40}\neq 0$, $\varphi_i(t)$ — функции, аналитические от t на L, обладающие свойством

$$\varphi_i(t)\to 0,\ t\varphi_i'(t)\to 0 \text{ при } t\to 0, \tag{6}$$

по крайней мере вдоль пути L, лежащего в ограниченном секторе $-\infty<\alpha\leqslant \operatorname{Arg} t\leqslant \beta<+\infty$, где $i=1, 2, 3, 4$.

Замечание 2. Случай, когда $u=x+y+z\equiv 0$, в данной работе рассматривать не будем.

Замечание 3. Очевидно, что при вещественных t, α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40} φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 тоже вещественны.

Используя методику работы [2], получим системы для определения n_1, n_2, n_3, n_4, α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40}, вид которых зависит от комбинаций знаков $>$, $<$, $=$ между n_1, n_2, n_3, n_4. В результате для n_1, n_2, n_3, n_4 получаем следующие значения:

1) $n_1=n_2=n_3=n_4=-1$,
2) $n_1=n_2=n_3=n_4-1=-2$, $n_4=-1$.

Рассмотрим случай, когда имеет место 1), т. е. $n_1=n_2=n_3=n_4=-1$. Относительно коэффициентов α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40} получим систему

$$\begin{gathered}
-2\alpha_{10}\alpha_{40}=-2\mu\alpha_{10}\alpha_{40}^2,\\
-\alpha_{20}\alpha_{40}=-\mu\alpha_{20}\alpha_{40}^2,\\
-2\alpha_{30}\alpha_{40}=-2\mu\alpha_{30}\alpha_{40}^2,\\
\alpha_{40}=\alpha_{10}+\alpha_{20}+\alpha_{30}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Отсюда будем иметь

$$\mu(\alpha_{10}+\alpha_{20}+\alpha_{30})=\mu\alpha_{40}=1, \tag{8}$$

где любые два из значений α_{10}, α_{20}, α_{30} произвольные, так как система (7) неопределена.

С помощью преобразований (5) система (2) преобразуется в семейство дифференциальных уравнений Брио и Буке

$$\begin{gathered}
t\frac{d\varphi_1}{dt}=-\mu\alpha_{10}\varphi_1-\mu\alpha_{10}\varphi_2-\mu\alpha_{10}\varphi_3+F_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),\\
t\frac{d\varphi_2}{dt}=-\mu\alpha_{20}\varphi_1-\mu\alpha_{20}\varphi_2+\mu\alpha_{20}\varphi_3+F_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),\\
t\frac{d\varphi_3}{dt}=-\mu\alpha_{30}\varphi_1-\mu\alpha_{30}\varphi_2-\mu\alpha_{30}\varphi_3+F_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),
\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$F_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -\alpha_{10}mt - mt\varphi_1 - \mu\varphi_1^2 - \mu\varphi_1\varphi_2 - \mu\varphi_1\varphi_3 + tf_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$
$$F_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -\alpha_{20}mt - mt\varphi_2 - \mu\varphi_1\varphi_2 - \mu\varphi_2^2 - \mu\varphi_2\varphi_3 + tf_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$
$$F_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -\alpha_{30}mt - mt\varphi_3 - \mu\varphi_1\varphi_3 - \mu\varphi_2\varphi_3 - \mu\varphi_3^2 + tf_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

причем под $f_i(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (где $i=1, 2, 3$) здесь и в дальнейшем будем понимать ряды относительно φ_i $(i=1, 2, 3)$, начиная со степени не ниже второй. Характеристическое уравнение системы (9) можно представить в виде $\lambda^2(\lambda+1)=0$, откуда следует, что среди характеристических корней всегда есть отрицательный $\lambda_1=-1$, а $\lambda_2=\lambda_3=0$.

Применяя выводы [3] о существовании и представлении в виде сходящихся рядов решений $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$ семейства систем (9), обладающих свойством (6), и переходя от (9) обратно к системе (2), получим двухпараметрическое семейство алгеброидных в окрестности точки t_0 решений вида (5), обладающих свойством (3).

Теперь рассмотрим случай 2), т. е. когда $n_1=n_2=n_3=n_4-1=-2$. Относительно коэффицентов α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40} получим систему

$$-4\alpha_{10}\alpha_{40} = 4a\alpha_{10}^2 + 2(a+b)\alpha_{10}\alpha_{20} + b\alpha_{20}^2 - 2\mu\alpha_{10}\alpha_{40}^2,$$
$$-2\alpha_{20}\alpha_{40} = (a+b)\alpha_{10}\alpha_{20} + 2(a+c)\alpha_{10}\alpha_{30} + (b+c)\alpha_{20}\alpha_{30} + b\alpha_{20}^2 - \mu\alpha_{20}\alpha_{40}^2,$$
$$-4\alpha_{30}\alpha_{40} = b\alpha_{20}^2 - 2(b+c)\alpha_{20}\alpha_{30} + 4c\alpha_{30}^2 - 2\mu\alpha_{30}\alpha_{40}^2,$$
$$\alpha_{10} + \alpha_{20} + \alpha_{30} = 0,$$

откуда $2(\alpha_{10}-\alpha_{30})\,[(a-b)\alpha_{10}+(c-b)\alpha_{30}+\alpha_{40}(2-\mu\alpha_{40})]=0$. Следовательно, возможны случаи:

1) $\alpha_{10}-\alpha_{30}=0$,
2) $(a-b)\alpha_{10}+(c-b)\alpha_{30}+\alpha_{40}(2-\mu\alpha_{40})=0$.

В случае, когда $\alpha_{10}-\alpha_{30}=0$, будем иметь

$$\alpha_{10}=\alpha_{30},\quad \alpha_{20}=-2\alpha_{10},\quad \mu\alpha_{40}=2,\quad \alpha_{10}=\frac{1}{\mu(a-2b+c)}, \tag{10}$$

где здесь и в дальнейшем будем предполагать, что $a-2b+c\neq 0$.

С помощью (5) система (4) преобразуется в систему дифференциальных уравнений Брио и Буке

$$\begin{aligned} t\frac{d\varphi_1}{dt} &= -\mu\alpha_{10}\varphi_4 + F_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ t\frac{d\varphi_2}{dt} &= -\mu\alpha_{20}\varphi_4 + F_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ t\frac{d\varphi_3}{dt} &= -\mu\alpha_{30}\varphi_4 + F_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ t\frac{d\varphi_4}{dt} &= 2a\varphi_1 + 2b\varphi_2 + 2c\varphi_3 - 3\varphi_4 + F_4(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) &= -\alpha_{10}mt - mt\varphi_1 - \mu\varphi_1\varphi_4 + f_1(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ F_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) &= -\alpha_{20}mt - mt\varphi_2 - \mu\varphi_2\varphi_4 + f_2(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ F_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) &= -\alpha_{30}mt - mt\varphi_3 - \mu\varphi_3\varphi_4 + f_3(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4),\\ F_4(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) &= -\alpha_{40}mt - mt\varphi_4 - \mu\varphi_4^2, \end{aligned} \tag{12}$$

причем $f_i(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ (где $i=1, 2, 3$) имеют тот же смысл, что и в случае, когда $n_1=n_2=n_3=n_4=-1$. Характеристическое уравнение системы (11) можно представить в виде

$$\lambda^2(2\mu(a\alpha_{10}+b\alpha_{20}+c\alpha_{30})+\lambda(\lambda+3))=0,$$

откуда $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=\lambda_4=0$.

Согласно теореме Хорна [3], при таких корнях характеристического уравнения система (11) имеет единственное голоморфное решение. Следовательно, переходя от (11) к (4), имеем единственное решение вида (5) со свойством (3), при этом должно выполняться условие $a-2b+c\neq 0$, α_{10}, α_{20}, α_{30}, α_{40} определяются единственным образом по формулам (10).

Случай, когда $(a-b)\alpha_{10}+(c-b)\alpha_{30}+\alpha_{40}(2-\mu\alpha_{40})=0$, не реализуется в силу того, что $u=x+y+z$.

З а м е ч а н и е 4. При определенных ограничениях, наложенных на коэффициенты, результаты, полученные в настоящей работе, могут быть применены в генетике.

Литература

1. Свирежев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. М 1982.
2. Кондратеня С. Г., Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 196 Т. 4, № 6. С. 983—990.
3. Horn J. // J. für Math. 1896. Bd 116. Hf 4. S. 265—306.

Минский государственный педагогический институт им. А. М. Горького,
Белорусский государственный институт народного хозяйства им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакци 8 августа 1990 г.