# Лекция 27. Вынужденные колебания

Содержание

# Амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний

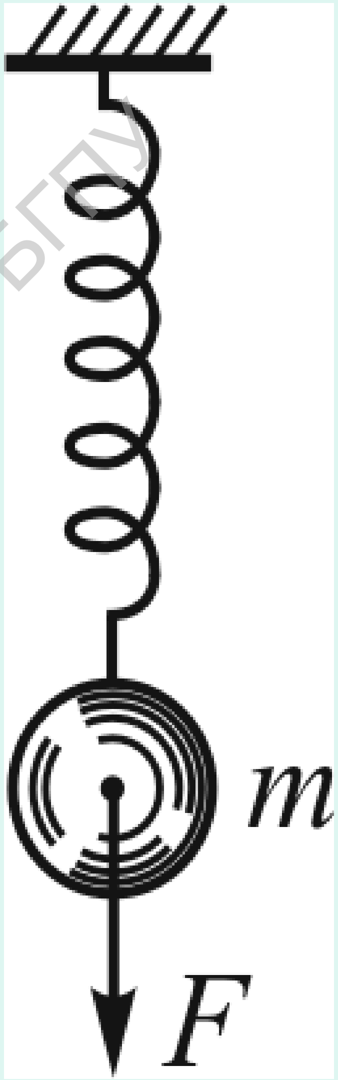
Если на колебательную систему действует периодически изменяющаяся внешняя сила, то система совершает колебания, характер которых в той или иной мере повторяет характер изменения этой силы.

Такие колебания называются вынужденными.

Наиболее значительное отличие вынужденных колебаний от рассмотренных выше заключается в том, что частота этих колебаний в конечном итоге определяется не свойствами самой системы, а частотой внешнего воздействия.

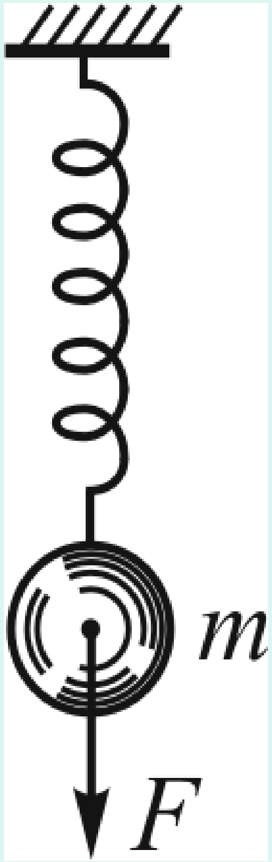
Пусть подвешенный на пружине груз массой $m$ испытывает действие внешней силы $F$, которая изменяется по закону $F = F_0 \cos \omega t$, и силы сопротивления, пропорциональной скорости груза $F_c = -r\upsilon$.

В рассматриваемом случае сила изменяется во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$, $F_0$ называется амплитудой силы и является наибольшим её значением.



Под действием силы *F* подвешенный груз будет постепенно раскачиваться. Амплитуда колебаний груза начнет возрастать.

Благодаря работе, выполняемой внешней силой, увеличиваются максимальные значения, которых достигают потенциальная энергия пружины и кинетическая энергия груза.

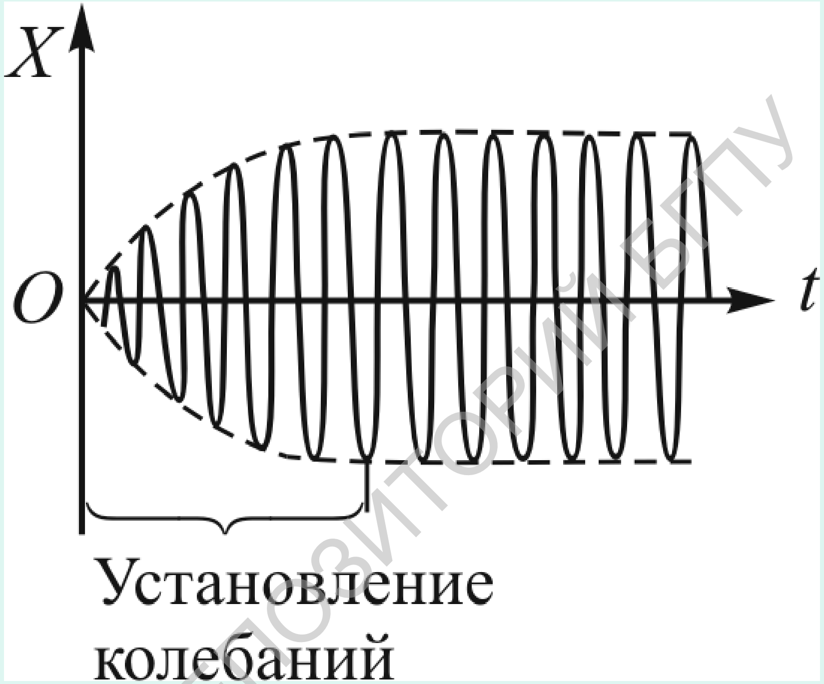



При этом будут возрастать потери на преодоление сил сопротивления.

Наконец наступит момент, когда работа внешней силы станет точно компенсировать потери энергии в системе.

Дальнейшее нарастание колебаний в системе прекратится и установятся колебания с некоторой постоянной амплитудой.

Этот процесс схематически изображен на рисунке.






Поскольку внешняя сила изменяется по гармоническому закону, то описываемые установившиеся колебания также будут гармоническими.

Уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t \; .$$

Разделив все члены этого уравнения на *m* и введя обозначения $k/m = \omega_0^2$, $r/m = 2\delta$, $f_0 = F_0/m$ ,

получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \; .$$

Предположим, что рассматриваемые вынужденные колебания происходят по закону

$$x = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Чтобы определить амплитуду *A* и начальную фазу $\alpha$ вынужденных колебаний, подставим значение $x$ и его производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t.$$

Поскольку $x$ является решением этого уравнения, то должны получить тождество:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) - 2\delta A\omega\sin(\omega t + \alpha) +$$

$$+\omega_0^2 A\cos(\omega t + \alpha) = f_0 \cos\omega t.$$

После простых тригонометрических преобразований получим:

$$\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A\cos\alpha-2\delta A\omega\sin\alpha-f_0\right]\cos\omega t+$$

$$+\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)A\sin\alpha-2\delta A\omega\cos\alpha\right]\sin\omega t=0$$

Для того чтобы последнее уравнение превратилось в тождество при любом $t$ нужно, чтобы коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ были равны нулю

$$\left.\begin{array}{l} A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\alpha-2\delta A\omega\sin\alpha-f_0=0, \\ A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\alpha+2\delta A\omega\cos\alpha=0. \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\alpha-2\delta A\omega\sin\alpha-f_0=0,\\ A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\alpha+2\delta A\omega\cos\alpha=0.\end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения системы найдём:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Возведя в квадрат и сложив оба уравнения системы, получим

$$A^2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right]=f_0^2,$$

откуда

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}$$ или $$A=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Полученные выражения определяют фазу и амплитуду вынужденных колебаний, которые происходят по гармоническому закону.

Из этих формул видно, что амплитуда А и фаза $\alpha$ зависят прежде всего от соотношения частоты $\omega_0$ собственных колебаний и частоты $\omega$ вынуждающей силы.

# Резонанс

Исследуем зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при разных затуханиях.

1. Выясним как зависит амплитуда вынужденных колебаний от частоты $\omega$ внешнего воздействия, когда затухание колебаний отсутствует ( $\delta = 0$ ).

При $\omega << \omega_0$ под корнем в выражении

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

играет роль только $\omega_0$ , поэтому

$$A_0 \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

$$A_0 \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}\ .$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний оказывается равной статическому смещению груза, которое вызывается постоянной силой $F_0$ .

При приближении частоты $\omega$ вынуждающей силы к собственной частоте $\omega_0$ системы выражение $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ уменьшается.

Значит, амплитуда *A* резко возрастает и проходит через максимум при совпадении частот $\omega = \omega_0$ .

При дальнейшем возрастании $\omega$ снова начинает играть роль квадрат разности $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2$ и амплитуда колебаний начинает уменьшаться, причем $\lim\limits_{\omega\to\infty} A = 0$ .

2. При наличии затухания амплитуда достигает максимума в том случае, если выражение под корнем в знаменателе будет иметь минимальное значение.

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} .$$

Продифференцировав это выражение по $\omega$ и приравняв к нулю, получим условие, определяющее $\omega$ при максимальной амплитуде

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\delta^2\omega = 0 .$$

Это уравнение имеет три решения:

$$\omega = 0 \quad \text{и} \quad \omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} .$$

$$\omega = 0 \quad , \qquad \omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad .$$

Первое решение соответствует максимуму знаменателя и не соответствует условию возрастания амплитуды

Из двух остальных решений отрицательное должно быть отброшено, потому что частота не может быть отрицательной.

Таким образом, искомая частота максимума амплитуды определяется соотношением:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad .$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\ .$$

Колебательная система особенно чувствительна к воздействию вынуждающей силы при этой частоте.

Возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{\text{рез}}$ называется резонансом, а частота — резонансной.

Подставив выражение для $\omega_{\text{рез}}$ в равенство

$$A = F_0 / m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}\ ,$$

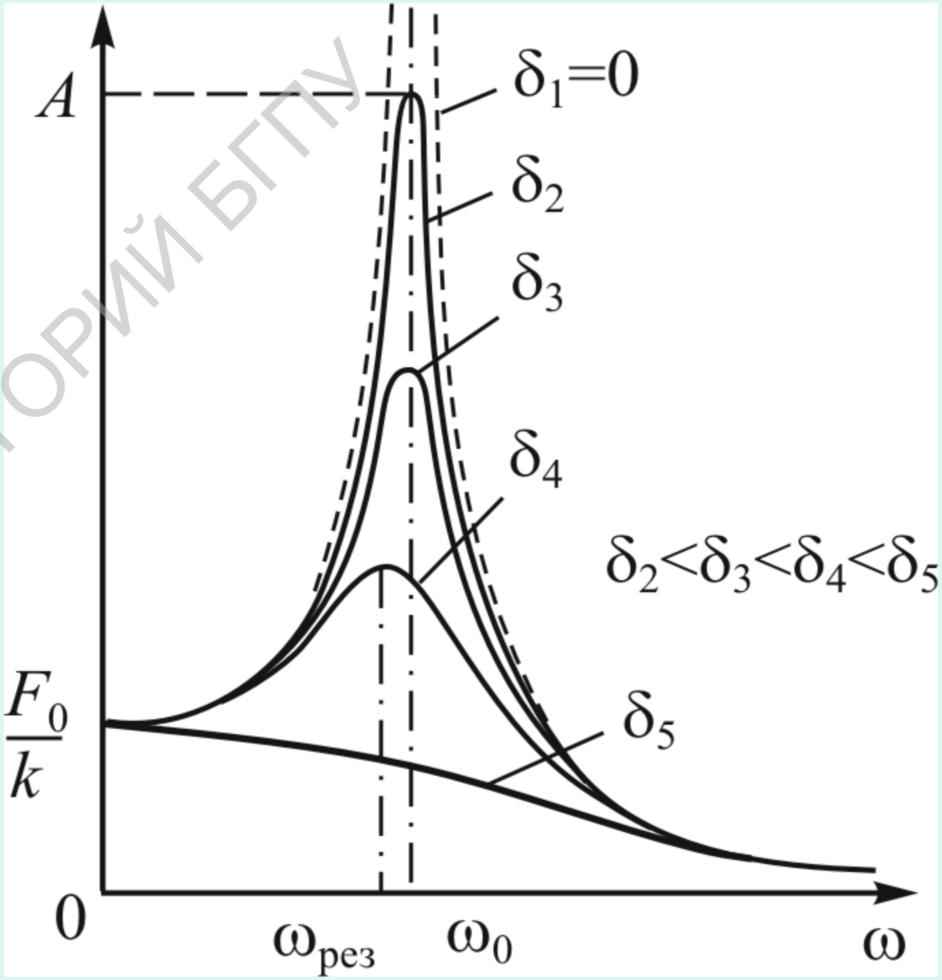
получим амплитуду при резонансе:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\ .$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы изображена на рисунке.

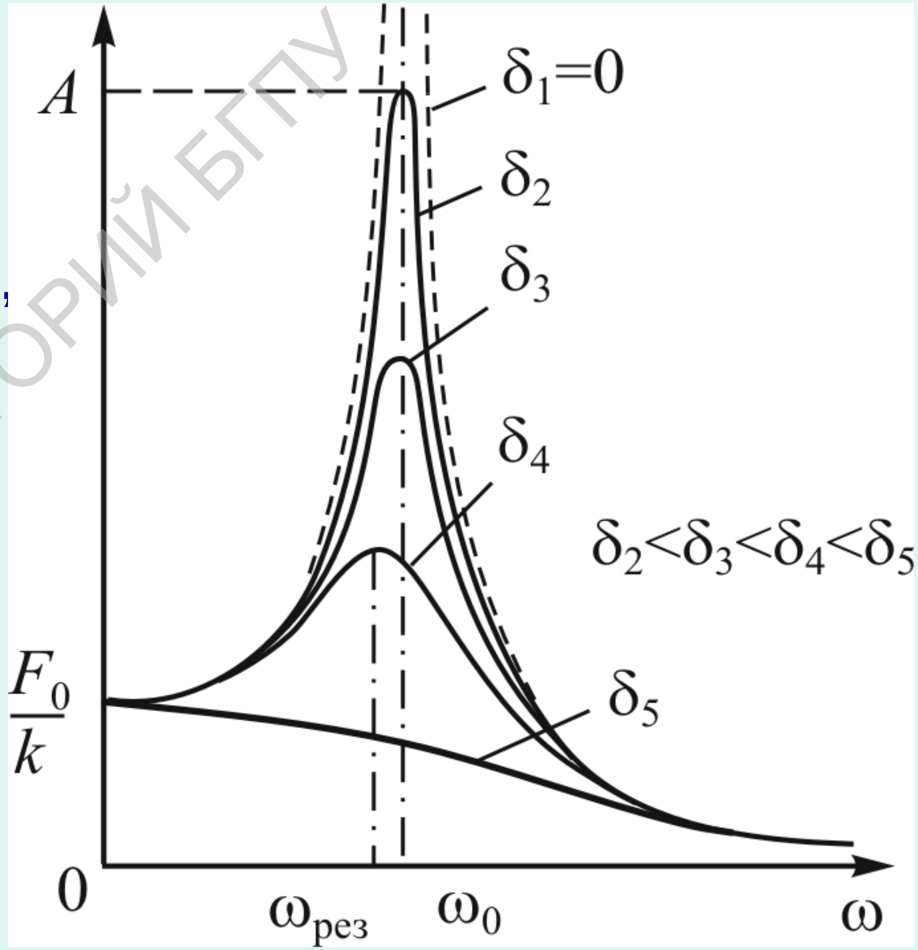
Кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания $\delta$ ,

а функции для разных $\delta$ называют резонансными кривыми.



Следует отметить, что ярко выраженными резонансными свойствами, т. е. способностью особенно сильно отзываться на колебания определенной частоты, обладают только системы с малым затуханием.

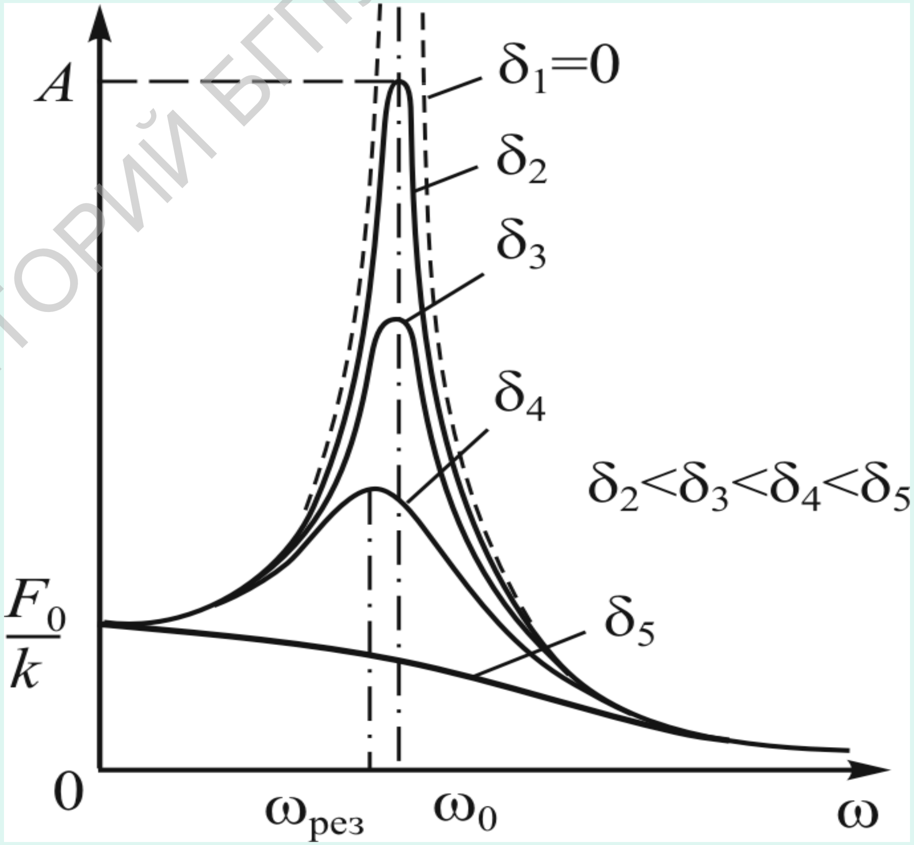
Анализируя полученные формулы и резонансные кривые, приходим к выводу, что чем больше $\delta$, тем ниже и левее максимум соответствующей кривой.



При этом с возрастанием $\delta$ амплитуда колебаний вблизи резонанса изменяется медленнее, максимум получается менее острым.

При значительном затухании ( $2\delta^2 > \omega_0^2$ ) значение $\omega_{\text{рез}}$ становится мнимым.

Это означает, что при данных условиях резонанс не возникает, с увеличением частоты амплитуда монотонно уменьшается (см. на рис. нижнюю кривую, что соответствует затуханию ).



Резонанс очень часто наблюдается в природе и играет большую роль в технике.

Большинство сооружений и машин способны совершать собственные колебания, поэтому периодические внешние воздействия могут вызвать их резонанс.

Вместе с тем явление резонанса часто бывает полезным.

В радиотехнике резонанс позволяет выделить сигнал данной станции на фоне других сигналов станций, в акустике резонанс используется для анализа звуков и их усиления.

# Добротность колебательной системы

Одной из основных характеристик колебательной системы является добротность $Q$, которая определяется отношением энергии, накопленной в колебательной системе, к энергии, которую расходует система за один период колебания.

Добротность характеризует качество колебательной системы, потому что чем она больше, тем меньше потери энергии.

Добротность колебательной системы связана с логарифмическим декрементом затухания.

При малых декрементах затухания $Q = \pi/\theta$ .

В механической системе массой m, жесткостью k и коэффициентом сопротивления r добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{r} = \frac{\omega_0 m}{r} \quad .$$

# Колебания в нелинейных системах. Автоколебания

Все рассмотренные выше механические колебательные процессы происходят в линейных системах.

Линейными колебательными системами называются такие, свойства которых не меняются при изменении их состояния.

Параметры линейных колебательных систем (масса, жесткость пружины, сопротивление среды) не зависят от параметров состояния системы (смещений и скоростей).

В тех случаях, когда в пределах возможных изменений состояния реальной системы начинают проявляться изменения параметров, приходится учитывать нелинейность колебательной системы.

Колебания таких систем описываются нелинейными уравнениями, а сами системы называются нелинейными.

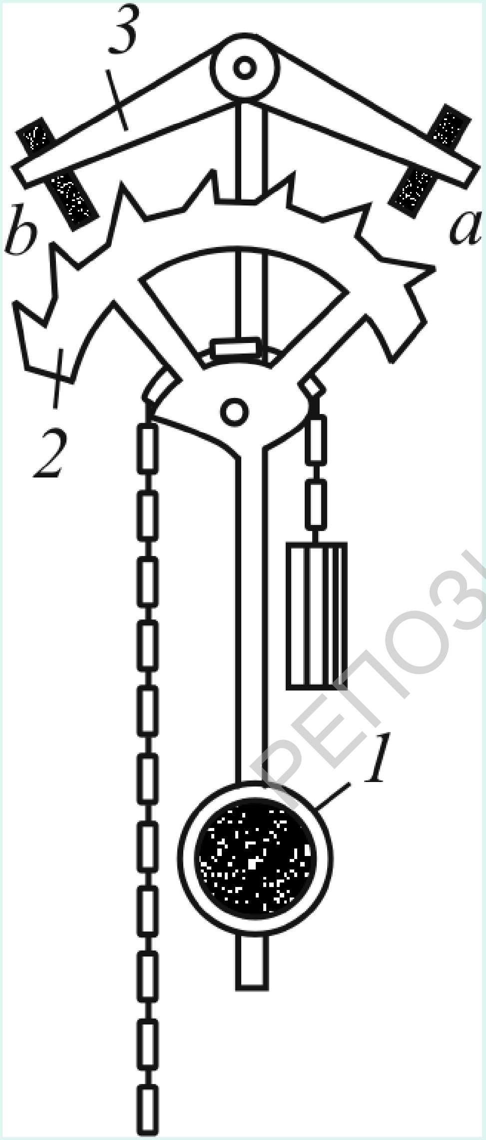
Типичным примером нелинейных колебаний являются автоколебания.

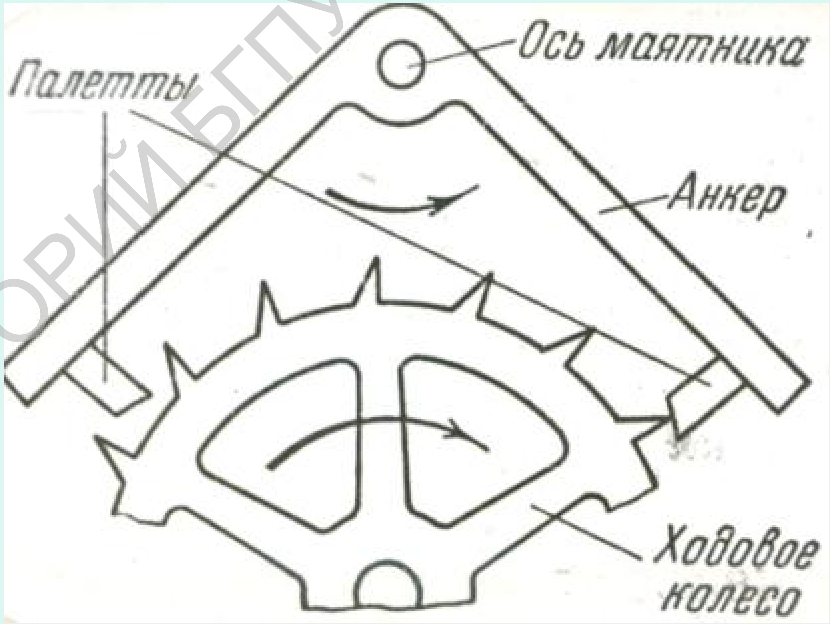
Автоколебаниями называют незатухающие колебания, которые могут существовать в какой-нибудь системе при отсутствии внешнего переменного воздействия.

Примером механических автоколебаний могут быть колебания маятника часов, струны в смычковых или столба воздуха в духовых музыкальных инструментах.

В любой автоколебательной системе, независимо от ее строения, можно выделить три основные элемента: собственно колебательную систему, источник энергии и конструкцию, регулирующую поступление энергии из источника.

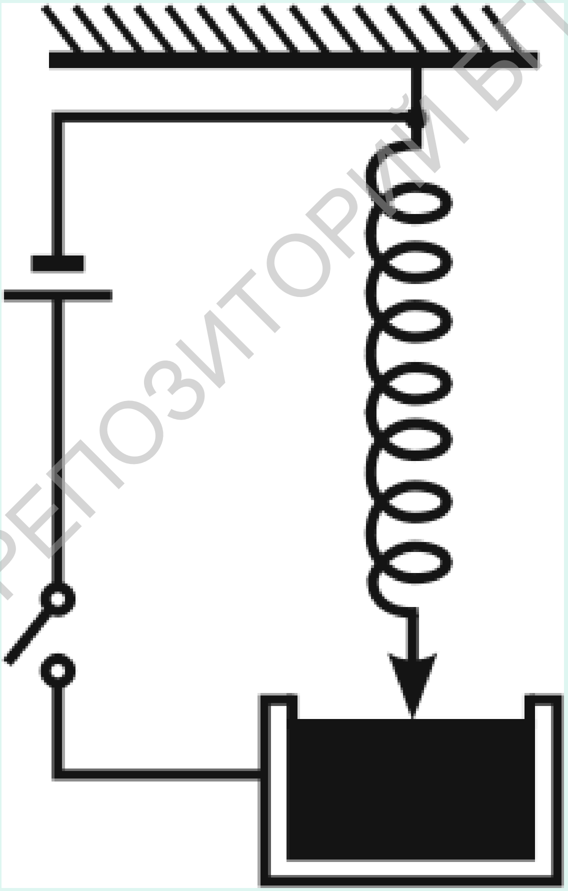
В качестве классического примера автоколебательной системы рассмотрим механизм маятниковых часов, который получает энергию от гири, поднятой на высоту.



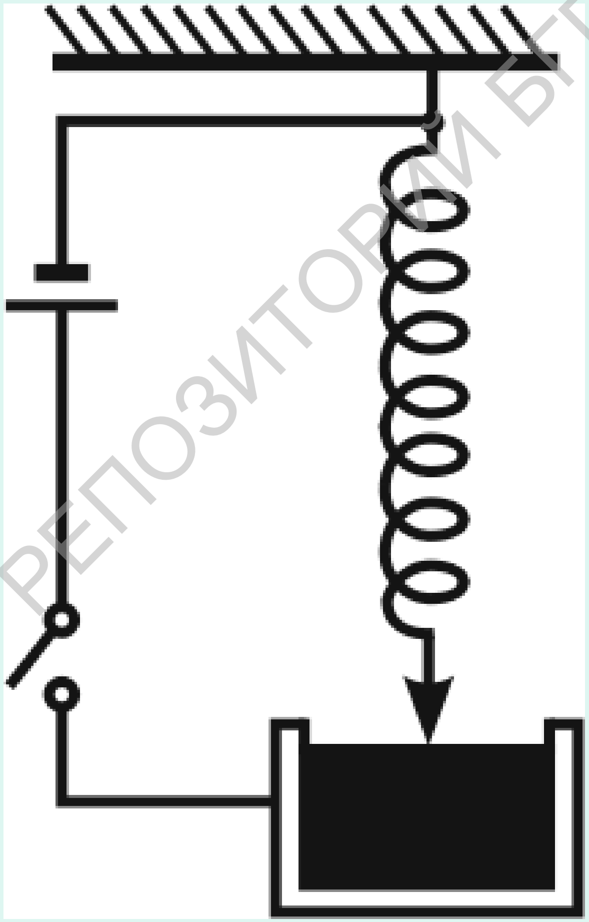
Рассмотрим механические автоколебания, которые совершает нелинейная электромеханическая система под действием источника постоянной электродвижущей силы.

Один конец пружины, по которой проходит электрический ток, закреплен, а второй опущен в сосуд с расплавленным сплавом Вуда.



При замыкании электрической цепи витки притягиваются, пружина при этом сжимается и цепь разрывается.

После разрыва цепи под действием силы тяжести и упругих свойств восстанавливается первоначальная длина пружины, цепь замыкается, и все повторяется опять.



# Задание к лекции

Весьма уникальную и совершенную автоколебательную систему, которая осуществляет все процессы жизнедеятельности человека, образуют его сердце и легкие. Ответьте на следующие вопросы:

- смоделируйте эту систему с указанием и краткой характеристикой работы отдельных ее частей;
- выберите для себя комфортные параметры жизни и на основании этих данных определите желаемое Вами оптимальное число автоколебаний, совершаемых системой на протяжении всей жизни.

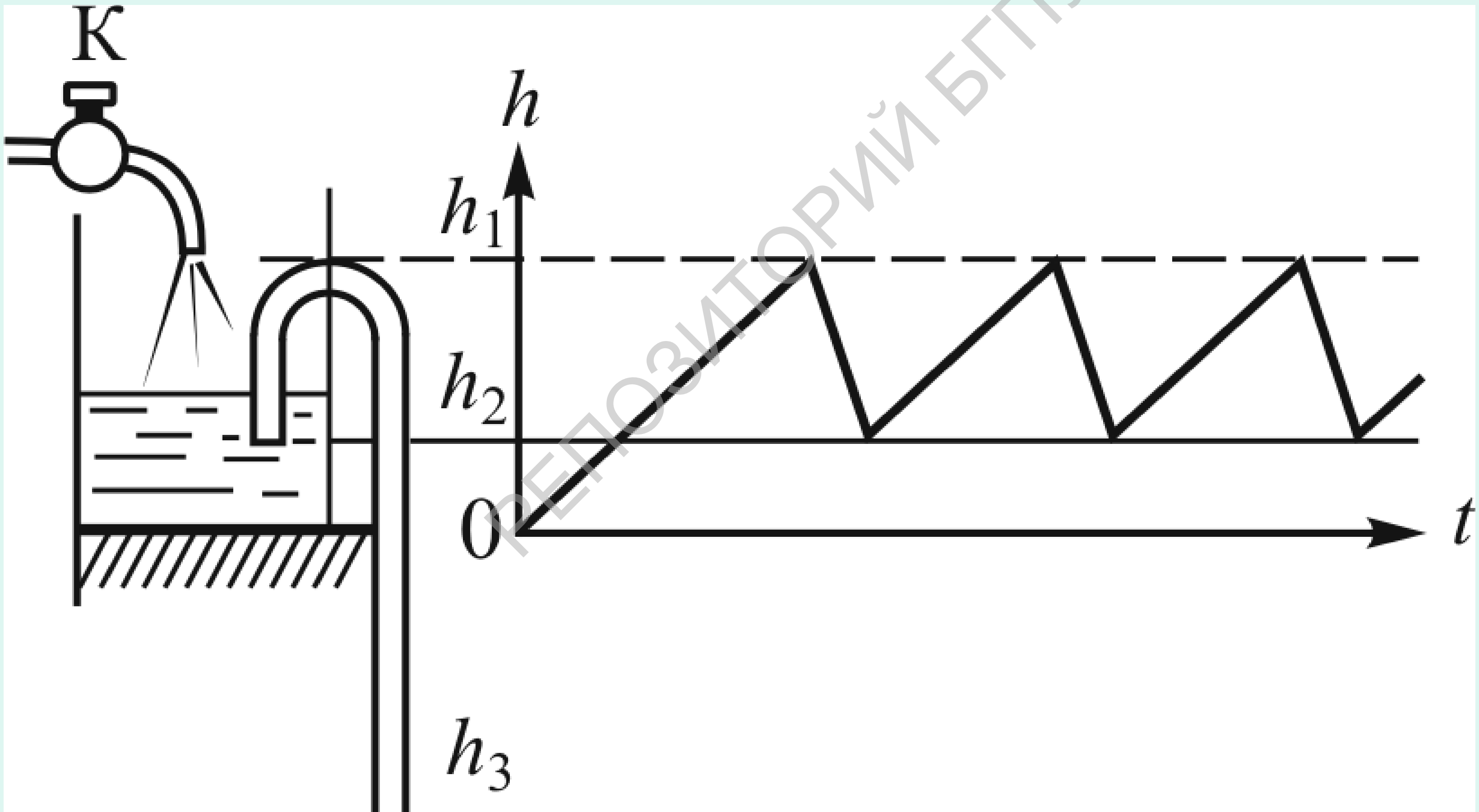
# Релаксационные колебания

Релаксационные колебания — это автоколебания, которые резко отличаются по форме от гармонических, поскольку в создающей их системе значительную роль играют диссипативные силы (например, силы внешнего или внутреннего трения).

При релаксационных колебаниях энергия, накопленная каким-нибудь элементом колебательной системы, не переходит полностью к другим элементам (как в системах, которые совершают гармонические колебания), а рассеивается в системе, превращаясь в теплоту.

Релаксационные автоколебательные системы характеризуются тем, что при отключении источника энергии колебательные движения в них невозможны.

Релаксационные колебания можно продемонстрировать при помощи следующего гидравлического приспособления.



Механические релаксационные колебания встречаются в разных механизмах (например, тормозные колодки).

Трение в колодках достаточно большое, но оно уменьшается (во всяком случае, в некоторой области) при увеличении относительной скорости движения поверхностей, между которыми возникают силы трения.