Лекция 26. Затухающие колебания

Содержание

Уравнение движения колебательных систем с трением

Реально существующие колебательные системы являются диссипативными.

В таких системах кроме квазиупругих сил, действуют силы сопротивления, на преодоление которых постепенно расходуется энергия механических колебаний.

В результате амплитуда уменьшается — колебания затухают.

Строго говоря, такие колебания не являются гармоническими.

Однако, если колебания затухают достаточно медленно, то для них правомерно использовать понятия и амплитуды, и периода.

Наиболее распространен случай малых колебаний, при которых скорость тела обычно небольшая и сила сопротивления $F_c = -r\upsilon$ пропорциональна первой степени скорости.

Знак «минус» указывает, что сила сопротивления противоположна скорости.

Пусть система колеблется под действием квазиупругой силы в среде, сопротивление которой линейно зависит от скорости.

Затухающие колебания в этом случае будут описываться уравнением $ma = -kx - r\upsilon$,

где r — коэффициент сопротивления среды.

Введем обозначения $\upsilon = \dot{x}$ и $a = \ddot{x}$ и перенесем все члены в левую часть уравнения $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$.

Разделив это уравнение на ***m*** и введя обозначения:

$k/m = \omega_0^2$, $r/m = 2\delta$ получим:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Величину δ называют показателем затухания.

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которые зависят от параметров системы и коэффициента сопротивления r .

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$.

Это уравнение отличается от уравнения для свободных колебаний наличием члена с первой производной по x.

С помощью подстановки $x = ze^{-\delta t}$ это уравнение приведем к уравнению гармонических колебаний.

Сделаем замену переменных в уравнении, используя производные: $\dot{x} = e^{-\delta t}\dot{z} - \delta e^{-\delta t} z$,

$$\ddot{x} = e^{-\delta t}\ddot{z} - 2\delta e^{-\delta t}\dot{z} + \delta^2 e^{-\delta t} z$$.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \cdot$$

Подставив значения $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ в уравнение и сократив все члены на множитель $e^{-\delta t}$, получим:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z - \delta^2 z = 0,$$

Или $$\ddot{z} + \left(\omega_0^2 - \delta^2\right) z = 0.$$

Рассмотрим случай, когда сопротивление среды небольшое и выполняется условие: $\omega_0^2 > \delta^2$.

Тогда $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, что дает возможность ввести обозначение $\omega_0^2 - \delta^2 = \omega^2$.

После этого уравнение примет вид

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0.$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

Как известно, решением этого уравнения является функция

$$z = A\cos(\omega t + \alpha_0) ,$$

где A и α_0 — постоянные, которые определяются из начальных условий.

Переходя к переменной x, получим

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha_0) .$$

Таким образом, получили решение исходного уравнения.

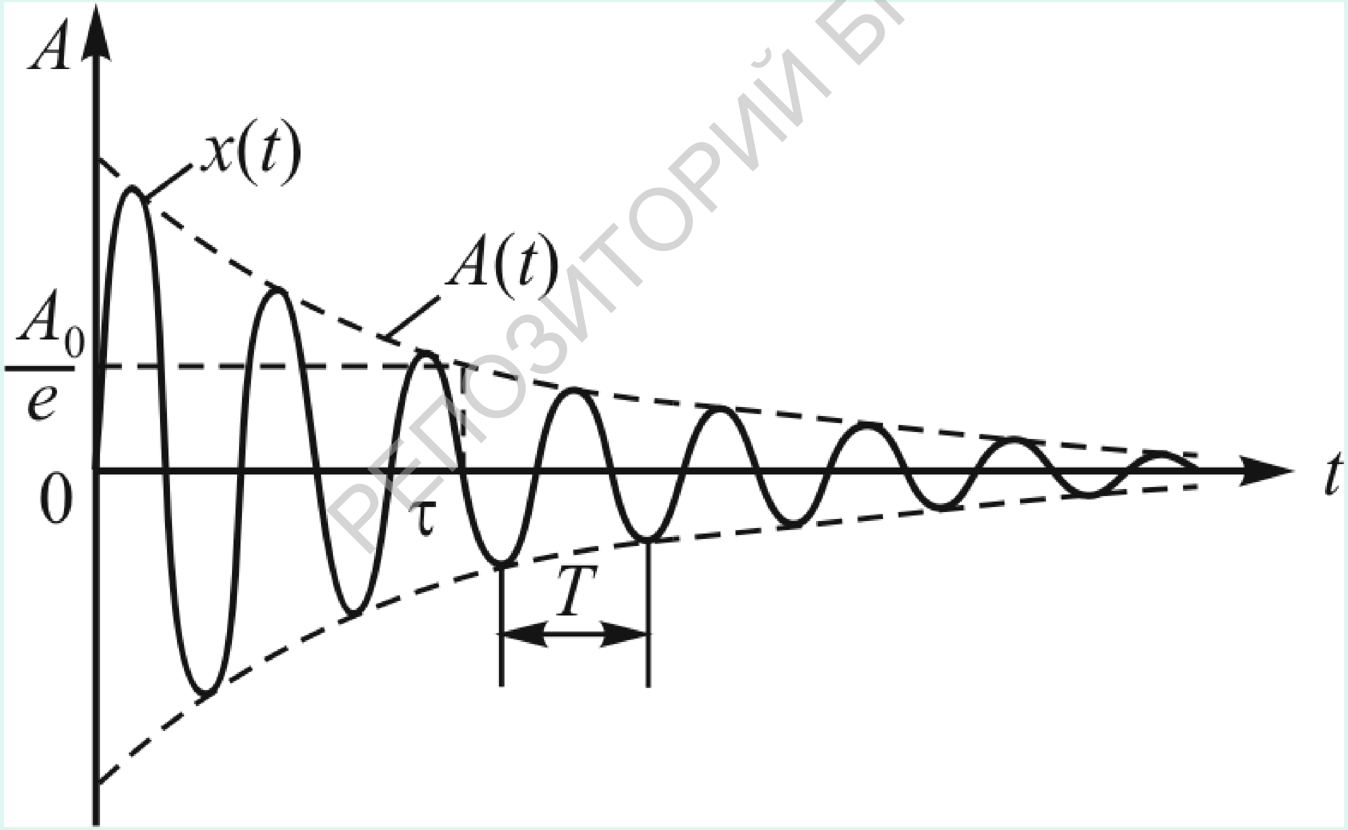
$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha_0)\ .$$

Из решения видно, что в результате совместного действия квазиупругих сил $F = -kx$ и сил сопротивления $F_c = -r\upsilon$ система совершает колебательное движение, амплитуда которого уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону

$$A = A_0 e^{-\delta t}\ .$$

$$A = A_0 e^{-\delta t}.$$

Графически изменение амплитуды с течением времени выглядит как огибающая кривая затухающих колебаний (пунктир на рисунке).



Частота ω затухающих колебаний определяется свойствами колебательной системы и среды, в которой происходят колебания.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} > T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

немного больше периода T_0 колебаний той же системы при отсутствии затухания (свободных колебаний), что связано с некоторым замедлением движения, которое обусловливают силы сопротивления.

Отметим, что при достаточно большом r движение не является периодическим.

Коэффициент затухания. Логарифмический декремент

Найдем отношение амплитуд, отстоящих друг от друга во времени на один период

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

Очевидно, что $e^{\delta T} = \mathrm{const}$, т. е. отношение амплитуд затухающих колебаний, которые отстоят друг от друга на интервал времени, равный периоду, постоянно на протяжении всего времени колебаний.

Натуральный логарифм полученного отношения называют логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \delta T.$$

Величину θ можно определить непосредственно из наблюдений, измерив амплитуды A_1 и A_2 двух последовательных колебаний: $\theta = \ln\left(A_1/A_2\right)$.

Знаяя θ и пользуясь соотношением $r/m = 2\delta$, можно определить коэффициент сопротивления среды

$$r = 2\delta m = 2\frac{\theta}{T}m.$$

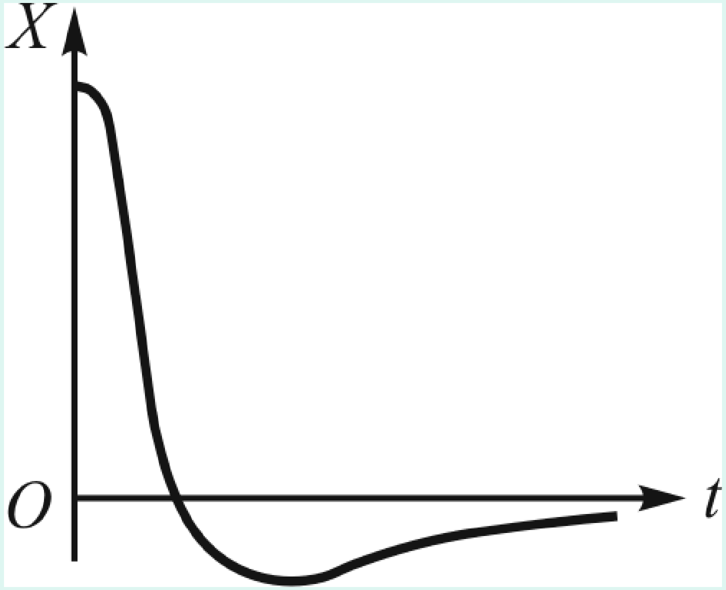
Показатель затухания δ характеризует быстроту уменьшения амплитуды.

Найдем время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$A_0 / A_\tau = e^{\delta\tau} = e$$, откуда $\delta\tau = 1$

или $\delta = 1/\tau$.

Из последнего соотношения вытекает, что коэффициент затухания δ — физическая величина, обратная промежутку времени, по истечении которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз.



При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и значительное увеличение периода колебаний.

При значениях δ, достаточно близких к ω_0, но меньших ее, движение тела теряет специфические черты колебательного движения, т. е. становится апериодическим.

В этом случае колебательная система, выведенная из положения равновесия, медленно возвращается в исходное положение, не совершая колебаний.

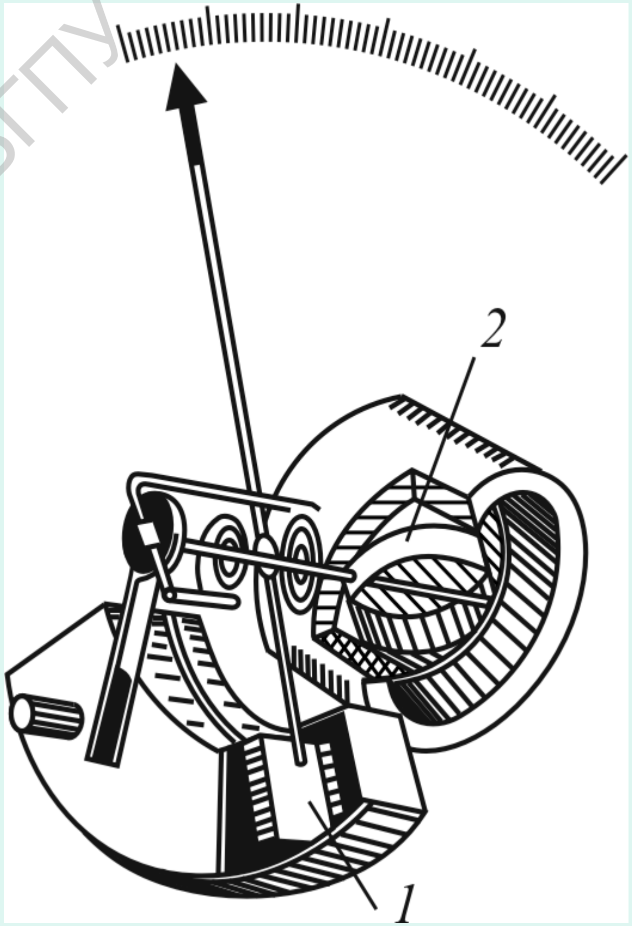
Нередко в разных технических конструкциях возникает необходимость погасить возникшие колебания, т. е. создать условия, при которых искусственно увеличился бы расход энергии в системе.

Например, в стрелочных измерительных приборах при резкой смене измеряемой величины возникают собственные колебания около нового положения равновесия.

Если трение в приборе мало, то эти колебания затухают медленно и пришлось бы ожидать, пока стрелка прибора установится в новом положении.

Во избежание этого в измерительных приборах искусственно увеличивается затухание колебаний при помощи специальных приспособлений, называемых демпферами (механическими или электромагнитными).

Простейшим является воздушный демпфер. Он состоит из легкого поршня *1*, соединенного с подвижной системой прибора *2*, и двигающегося в ограниченном объеме без трения.



Сопротивление воздуха при движении поршня делает колебания апериодическими.

На таком же принципе основана работа автомобильного амортизатора, который представляет собой заполненный вязкой жидкостью цилиндр, где движется поршень с мелкими отверстиями.