Лекция 23. Колебательное движение

Содержание

1. Гармонические колебания
2. Характеристики колебательного движения
3. Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении
4. Связь колебательного и вращательного движений. Векторные диаграммы

Гармонические колебания

Колебательные процессы, характеризующиеся повторяемостью во времени параметров физических величин, которые определяют движение или состояние, часто встречаются в окружающей среде.

Свойства повторяемости имеют, например, колебания маятника часов, струны или ножек камертона, корабля на волнах, молекул в твердом теле и т. д.

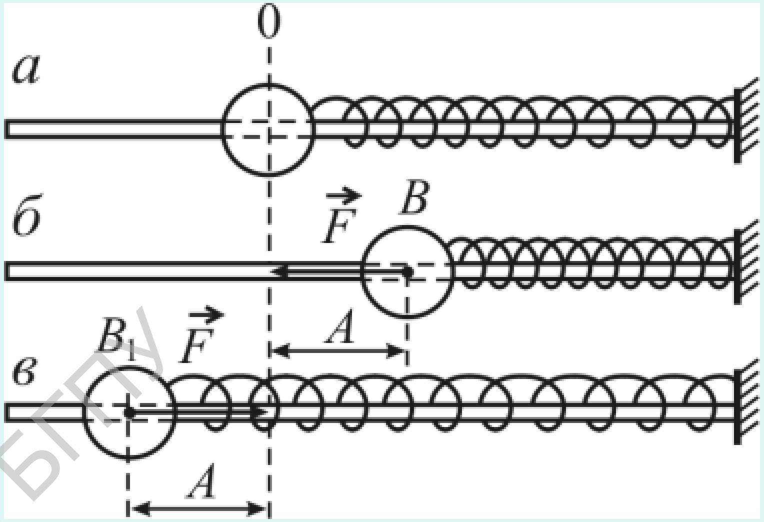
Колебания, при которых состояние движения тела повторяется через равные промежутки времени, называются периодическими.

Среди разнообразных колебательных движений отдельное место занимают гармонические колебания.

При таких колебаниях физические величины, описывающие эти движения (например, отклонение от состояния равновесия, скорость, ускорение и т. д.), изменяются с течением времени по закону косинуса или синуса.

Гармонические колебания являются простейшим видом колебательного движения.

Рассмотрим колебания, которые происходят под воздействием упругой силы.



Для этого используем колебательную систему, состоящую из массивного шара с отверстием, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить с ничтожно малым трением.

На стержень надета стальная пружина, закрепленная на его конце и на шаре. Массой пружины будем пренебрегать.

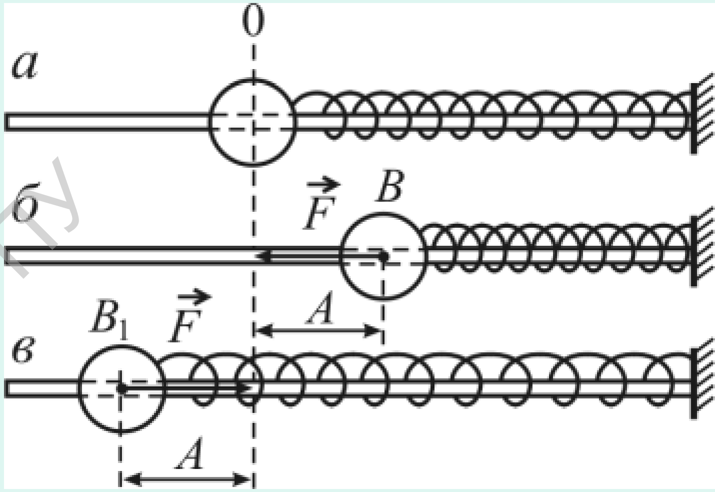
В положении О шар находится в состоянии покоя.

При этом пружина не деформирована (рис. a).

Сместим шар из состояния равновесия вправо (рис. б) на малый отрезок ОВ, а затем отпустим.

В результате он начнет ускоренно двигаться влево под действием упругой силы пружины $\vec{F} = -k\vec{x}$, где $\vec{x}$ — вектор смещения шара из состояния равновесия.

Знак «минус» обозначает, что сила направлена в сторону, противоположную вектору смещения, т. е. к состоянию равновесия.



Колебания, происходящие в системе при отсутствии внешних воздействий после какого-нибудь начального отклонения ее из состояния равновесия, называются свободными или собственными.

Если в системе отсутствует переход механической энергии в другие ее виды (консервативная система), то свободные колебания будут незатухающими.

В любой реальной колебательной системе часть энергии колебательного движения всегда расходуется на преодоление сил сопротивления и колебания постепенно затухают.

Покажем, что свободные незатухающие колебания, которые происходят под действием упругой силы, являются гармоническими.

Уравнение второго закона Ньютона для колеблющегося шара $ma = -kx$,

где a — ускорение шара.

Ускорение a, равное второй производной смещения x по времени, обозначим: $a = \ddot{x}$.

Подставляя в формулу вместо a его значение, получим

$m\ddot{x} = -kx$, или $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$.

Поскольку k и m — величины положительные, то их отношение приравняем квадрату некоторой величины ω_0.

С учетом того, что $\omega_0^2 = k/m$, получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \, .$$

Как видим, колебания шара под действием упругой силы описываются однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Решение данного уравнения должно давать возможность определить смещение x как функцию времени t.

Легко проверить, что общим решением этого уравнения будет функция:

$$\left.\begin{array}{l} x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0) \\ \textit{или} \quad x = A\sin(\omega_0 t + \alpha_1), \end{array}\right\}$$

где A и α_0— постоянные величины, которые зависят от начальных условий $(\alpha_1 = \alpha_0 + \pi/2)$.

Характеристики колебательного движения

Таким образом, смещение из состояния равновесия x изменяется с течением времени по гармоническому закону, что позволяет сделать вывод, что движение системы под действием упругой силы является гармоническим колебанием.

Полученные уравнения называются уравнениями гармонического колебательного движения.

Смещение x изменяется в пределах от $-A$ до $+A$.

Величина A, равная максимальному отклонению от состояния равновесия, называется амплитудой гармонических колебаний.

Амплитуда зависит от первоначального отклонения или от толчка, после которого начались колебания системы.

Амплитуда A — для данных колебаний постоянная положительная величина.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$
$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha_1).$$

Величина $(\omega_0 t + \alpha_0)$ называется фазой колебаний.

Постоянная α_0 — начальная фаза или фаза в момент времени $t = 0$.

Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени.

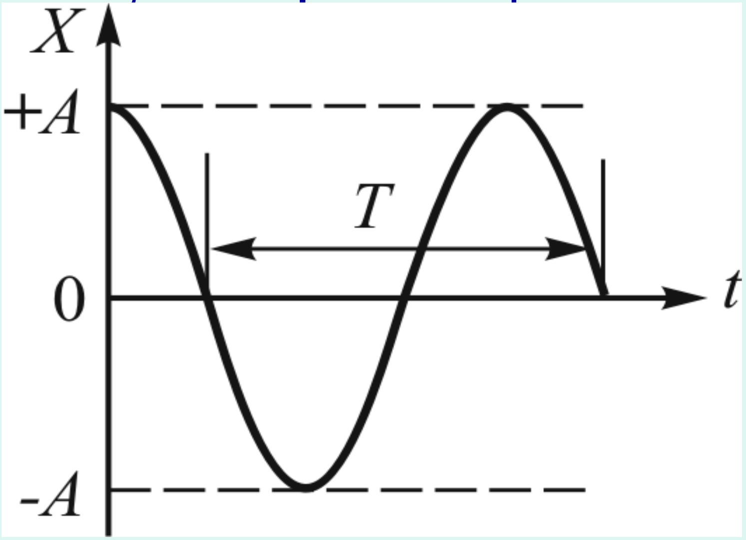
Как видно из формул, фаза колебаний $(\omega_0 t + \alpha_0)$ определяет смещение x и направление смещения колеблющейся точки в данный момент времени.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$
$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha_1).$$

Величина ω_0 называется циклической, или круговой частотой колебаний.

Циклическая частота связана с периодом колебаний T и частотой колебаний ν .

Учитывая, что косинус — периодическая функция с периодом 2π, любое состояние системы, совершающей гармонические колебания, повторяется через такой промежуток времени *T*, за который приращение фазы колебаний оказывается равным 2π .



Этот промежуток времени называется **периодом колебания.**

Его можно определить следующим образом:

$$\left[\omega_0\left(t+T\right)+\alpha_0\right]=\left[\omega_0 t+\alpha_0\right]+2\pi,$$

откуда

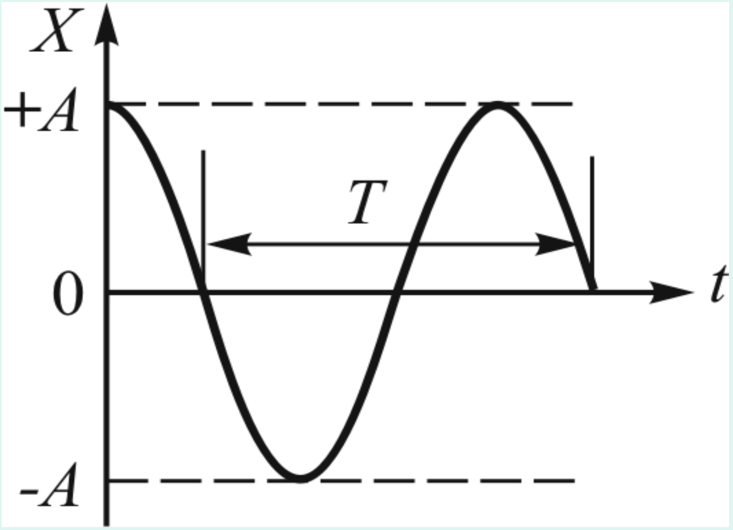
$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Количество колебаний за единицу времени называют **частотой колебаний**, которая связана с периодом колебаний соотношением:

$$\nu=\frac{1}{T}.$$

Из сравнения последних формул получаем:

$$\omega_0=2\pi\nu.$$



Как видно, циклическая частота ω_0 равна количеству колебаний за 2π секунд.

С учетом полученных соотношений получаем выражение для периода колебаний шара:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

Период колебаний шара на пружине зависит от характеристик системы: массы m и коэффициента упругости *k* пружины.

Скорость и ускорение при гармоническом колебательном движении

Колебания шара определяются не только его смещением x, но также скоростью υ и ускорением a.

Формулу для нахождения скорости шара получим путем дифференцирования выражения

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$$

по времени

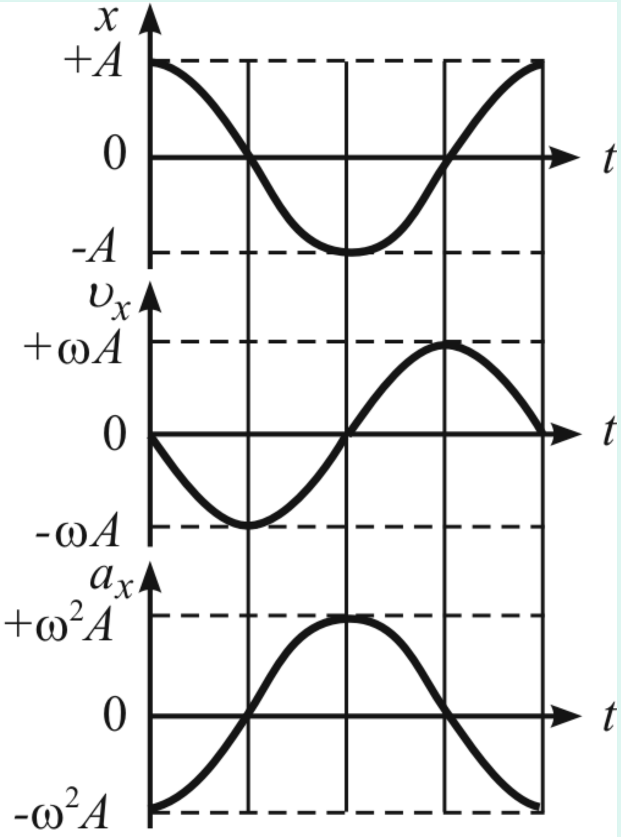
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha_0\right).$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$$.

Как видно из формулы, модуль скорости также изменяется по гармоническому закону, амплитуда ее равна $A\omega_0$.

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$$.

Если сравним уравнения для x и для υ , то увидим, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$. Она всегда направлена в сторону движения.



Дифференцируя выражение для скорости

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$$

по времени, найдем формулу для ускорения колеблющегося шара

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right),$$

где $A\omega_0^2$ — амплитуда ускорения.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right),$$

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right).$$

Как видно из полученных уравнений, ускорение и смещение находятся в противофазе: в тот момент, когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение также достигает наибольшего по величине отрицательного значения, и наоборот.

Ускорение всегда направлено к состоянию равновесия.

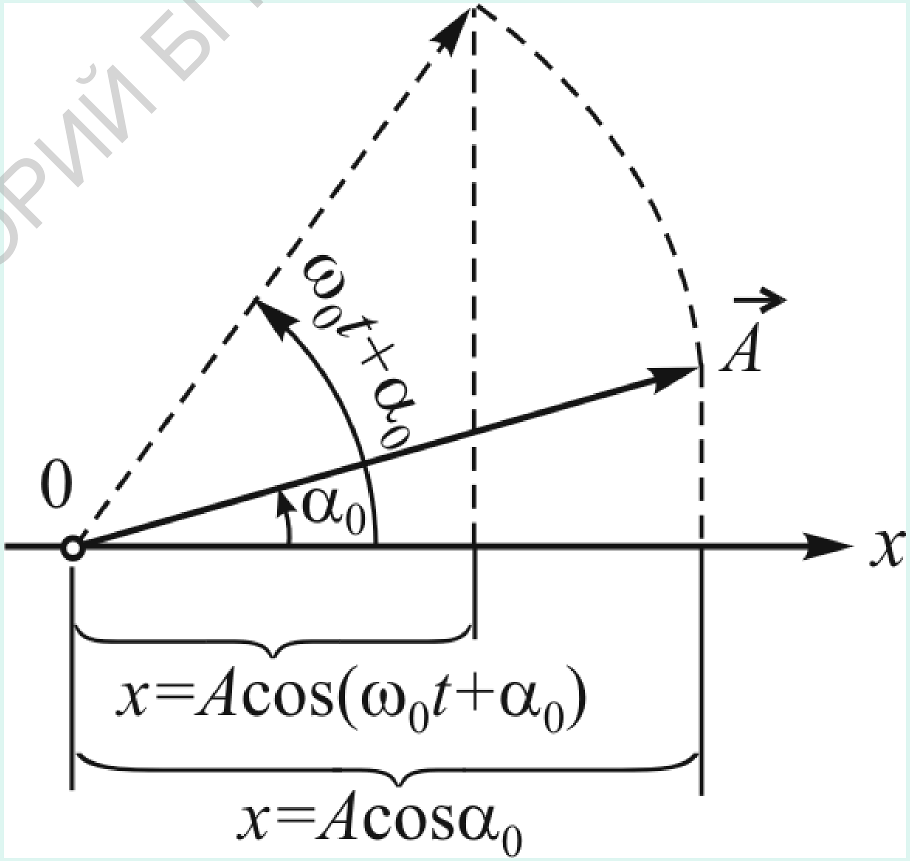
При отдалении от состояния равновесия колеблющаяся точка движется замедленно, при приближении к нему — ускоренно.

Связь колебательного и вращательного движений

Часто при рассмотрении колебательных процессов оказывается удобным геометрический способ их представления с помощью векторной диаграммы.

Способ заключается в следующем.

Возьмем некоторую горизонтальную ось x и выберем на ней произвольную точку *0*.

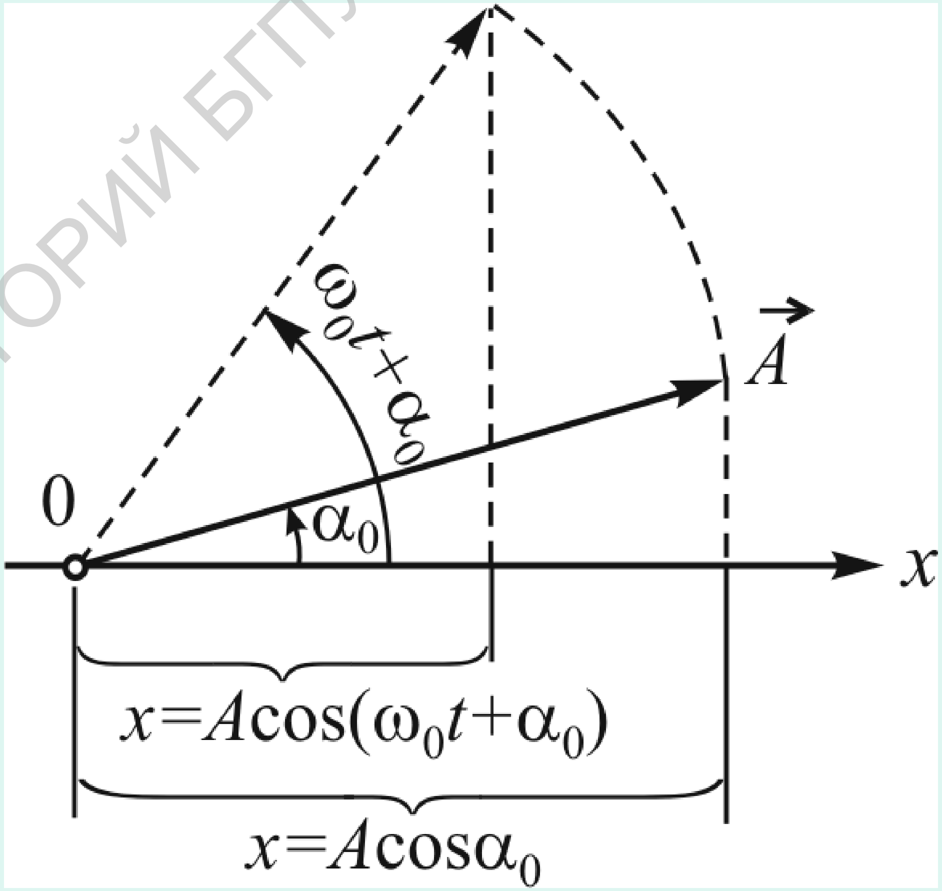


Из этой точки под углом α_0 , равным начальной фазе, построим в определенном масштабе вектор $\vec{A}$, длина которого равна амплитуде колебаний.

Проекция этого вектора на ось x, как видно из рисунка, дает в том же масштабе начальное смещение точки

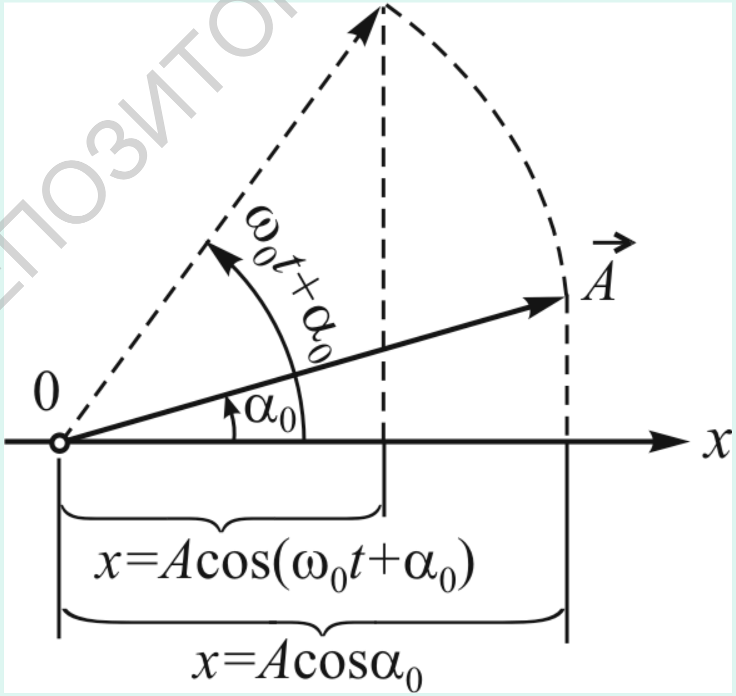
$$x = A\cos\alpha_0 \,.$$

Будем вращать вектор амплитуды с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки.



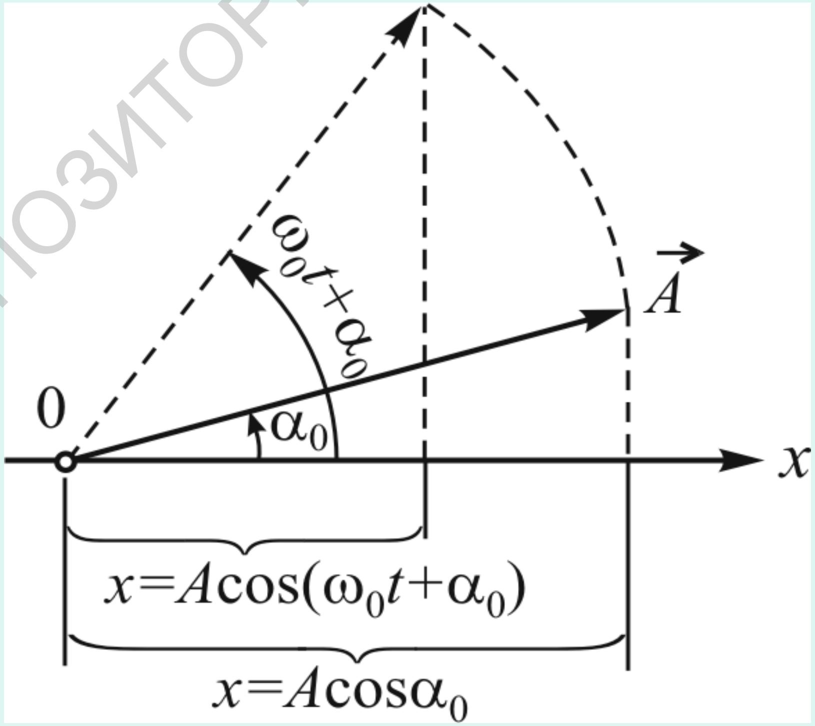
В произвольный момент времени *t* вектор $\vec{A}$ образует с осью x угол, равный фазе ($\omega_0 t + \alpha_0$), а его проекция на ось x будет $x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha_0\right)$, т. е. равна смещению колеблющейся точки в момент времени *t*.

В то время как конец вектора совершит один полный оборот по окружности с угловой скоростью ω_0, его проекция осуществит полное колебание вдоль диаметра.



Таким образом, гармоническое колебательное движение представляется движением проекции на некоторую ось вектора $\vec{A}$, который отложен из произвольной точки оси под углом, равным начальной фазе, и вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

Поскольку угловая скорость вращения измеряется в радианах в секунду ($\omega_0 = 2\pi/T$), то количество колебаний в секунду проекции вектора (частота его колебаний) $\nu = 1/T = \omega_0/(2\pi)$.



Таким образом, угловая скорость характеризует количество колебаний за время 2π с, которые совершает проекция вектора $\vec{A}$, поворачивающегося по окружности, на диаметр.

Отсюда понятно, почему величину ω_0 называют круговой или циклической частотой.