

Лекция 21. Стационарное движение жидкости

Содержание

1. Уравнение неразрывности струи
2. Уравнение Бернулли
3. Формула Торричелли
4. Течение жидкости в трубке переменного сечения
5. Реакция вытекающей струи

Уравнение неразрывности струи

При рассмотрении движения жидкости в большинстве случаев с достаточной степенью точности можно считать ее идеальной жидкостью.

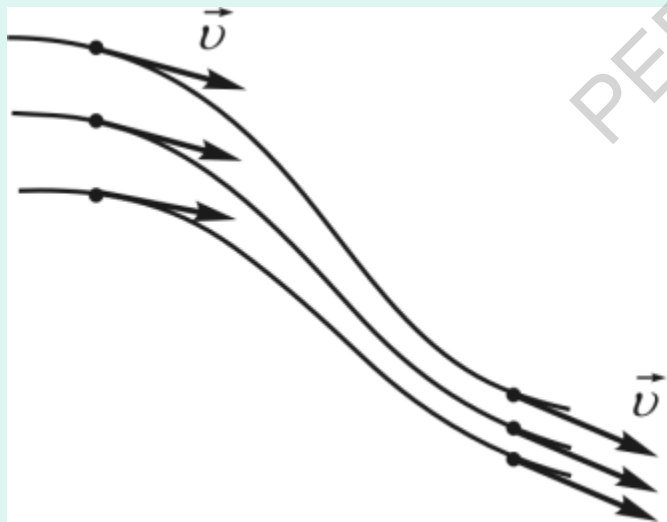
Идеальная жидкость — воображаемая несжимаемая жидкость, лишенная вязкости и теплопроводности.

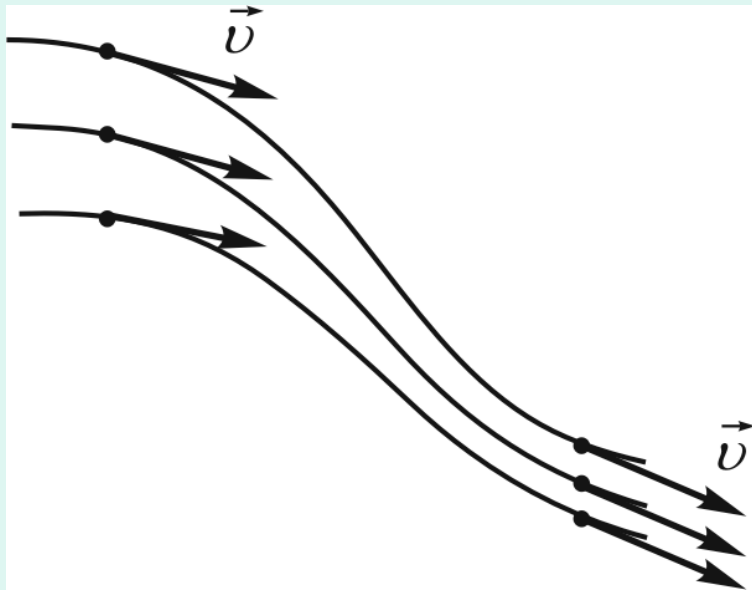
В идеальной жидкости отсутствует внутреннее трение, т. е. нет касательных напряжений между двумя соседними слоями, она непрерывна и не имеет структуры.

Движение слоев жидкости или газа относительно друг друга или всей жидкости или газа относительно твердых тел называют **течением**.

Совокупность частиц движущейся жидкости называется **потоком**.

Если в движущейся жидкости провести линии таким образом, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала по направлению с вектором скорости частиц $\vec{v}$, то такие линии называются **линиями тока**.





Условились проводить линии тока таким образом, чтобы их **густота** была больше там, где больше **скорость** течения жидкости и меньше там, где жидкость течет медленнее.

В результате по картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о **величине** вектора $\vec{v}$ в разных точках пространства.

Если ни в одной из точек потока вектор скорости $\vec{v}$ с течением времени **не изменяется**, то течение жидкости называется установившимся или **стационарным**.

Но в **разных** точках стационарного потока скорости могут быть **различными**.

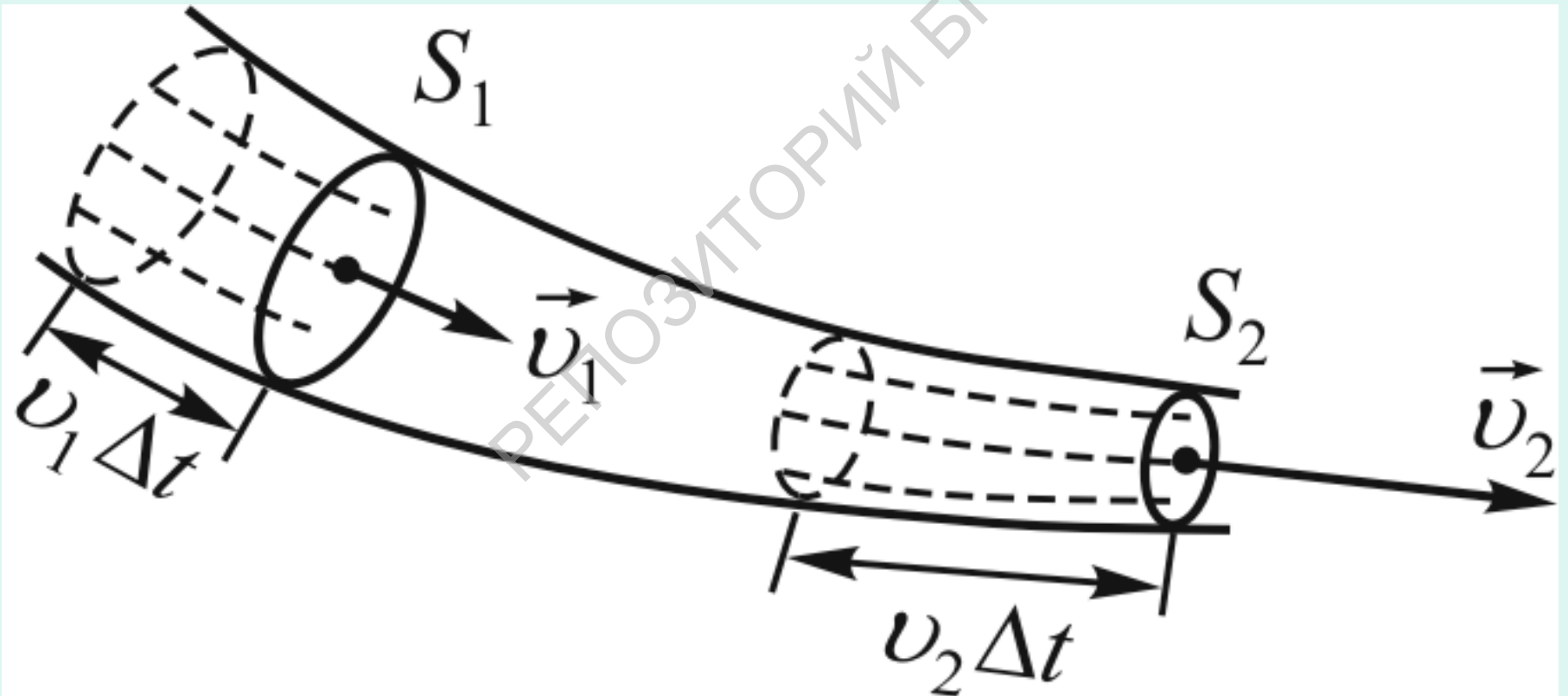
Это означает, что **линии тока** при установившемся течении жидкости совпадают с **траекториями** частиц.

Часть потока, ограниченная боковой поверхностью, образованной линиями тока, называется **трубкой тока**.

Любая **трубка тока** в стационарном потоке жидкости **не изменяется** с течением времени.

Следовательно, **количество жидкости**, проходящей через какое-то сечение трубки тока, **сохраняется неизменным** на всем протяжении трубки (поскольку жидкость считаем несжимаемой).

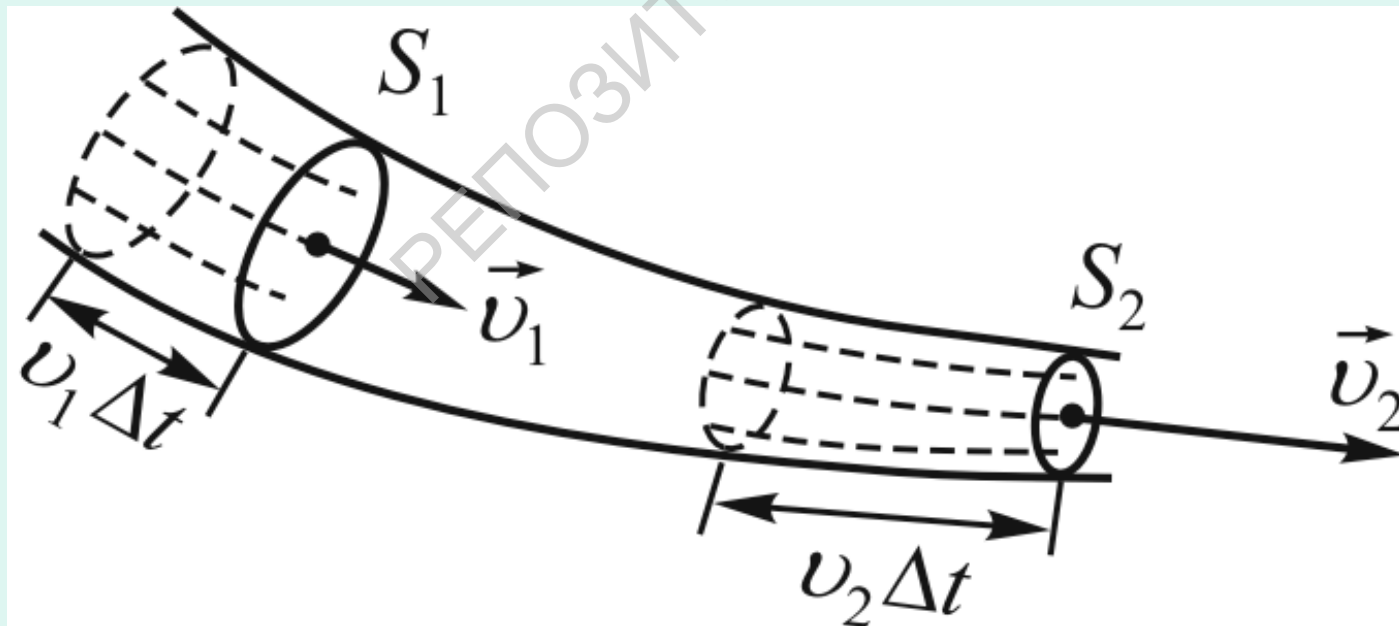
Выделим в стационарном потоке идеальной жидкости участок достаточно **узкой** трубки тока, ограниченной поперечными сечениями S_1 и S_2 .



Эти **сечения** должны быть настолько **малыми**, чтобы скорости частиц жидкости, проходящих через любую точку каждого сечения, можно было бы считать **одинаковыми** по величине и перпендикулярными к сечению.

Найдем **объем жидкости**, протекающей за интервал времени Δt через каждое из сечений S_1 и S_2 .

Через сечение S_1 пройдут все частицы жидкости, расстояние которых до этого сечения в начальный момент не превышало произведения $v_1 \Delta t$.

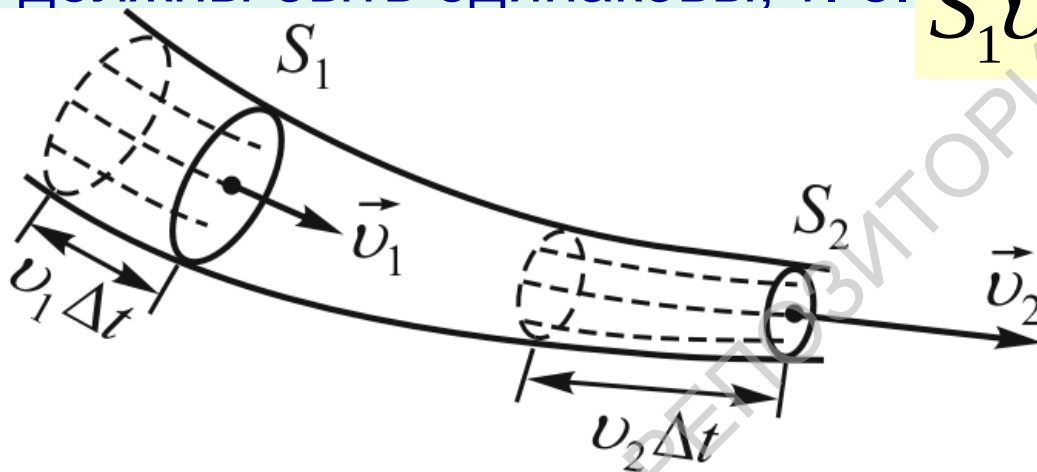


Откуда **объем жидкости**, которая протекает через сечение S_1 за время Δt , равен $S_1 v_1 \Delta t$.

Аналогично за то же время через сечение S_2 протечет **объем жидкости**, равный $S_2 v_2 \Delta t$.

Учитывая, что жидкость **несжимаемая** и поток стационарный, приходим к выводу, что найденные объемы должны быть одинаковы, т. е.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$



или

$$Sv = \text{const}.$$

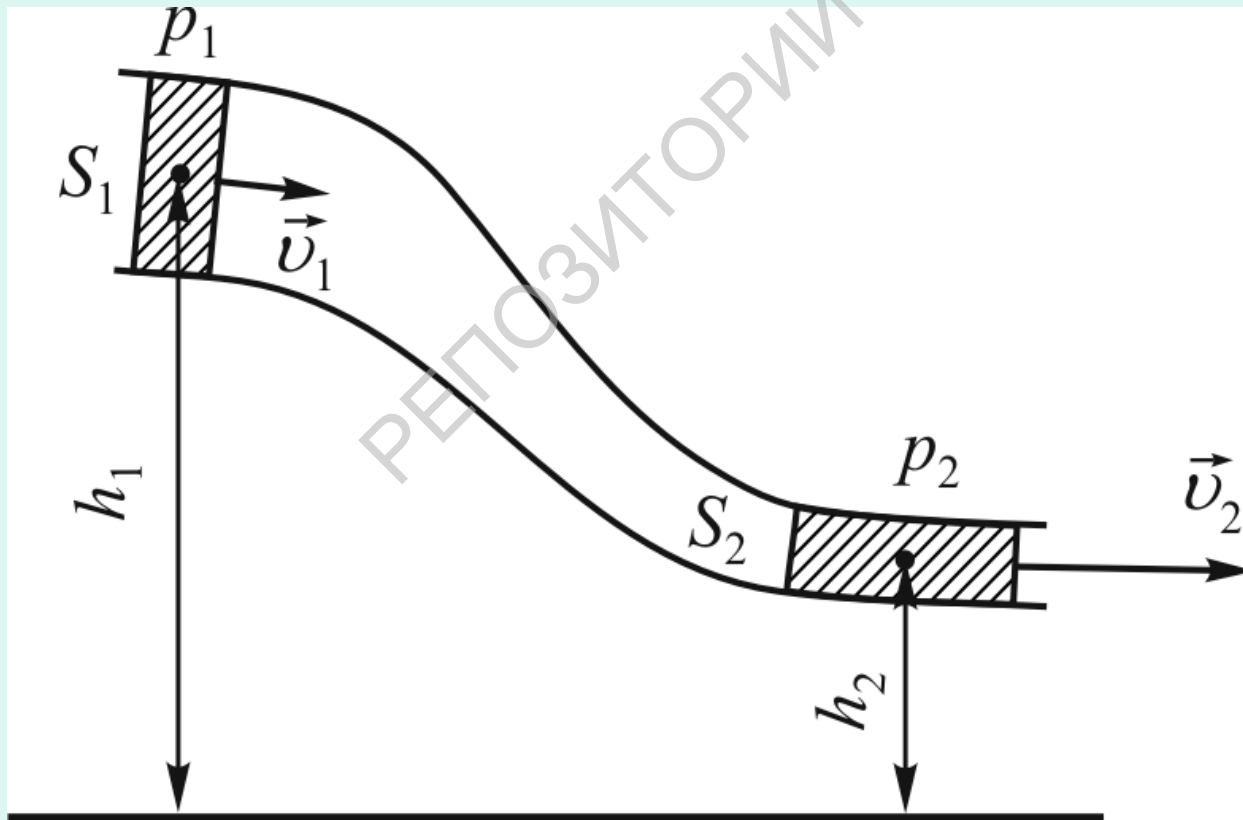
Полученное соотношение называется **уравнением неразрывности струи**.

Уравнение Бернулли

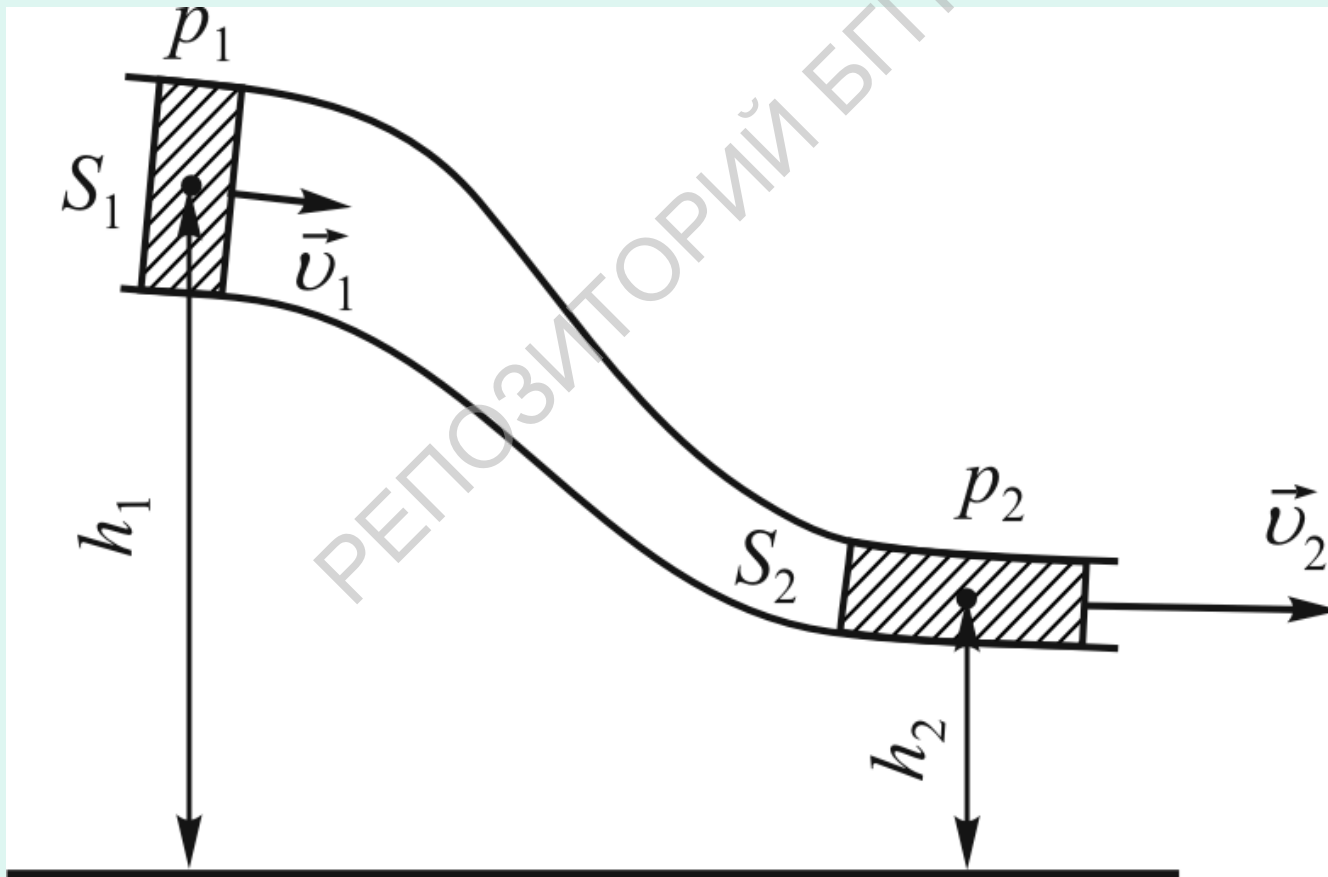
Рассмотрим **стационарное** течение жидкости.

При **перемещении** некоторой массы жидкости

Δm из одного сечения трубы во второе ее скорость, а значит, и кинетическая энергия **изменяются**.

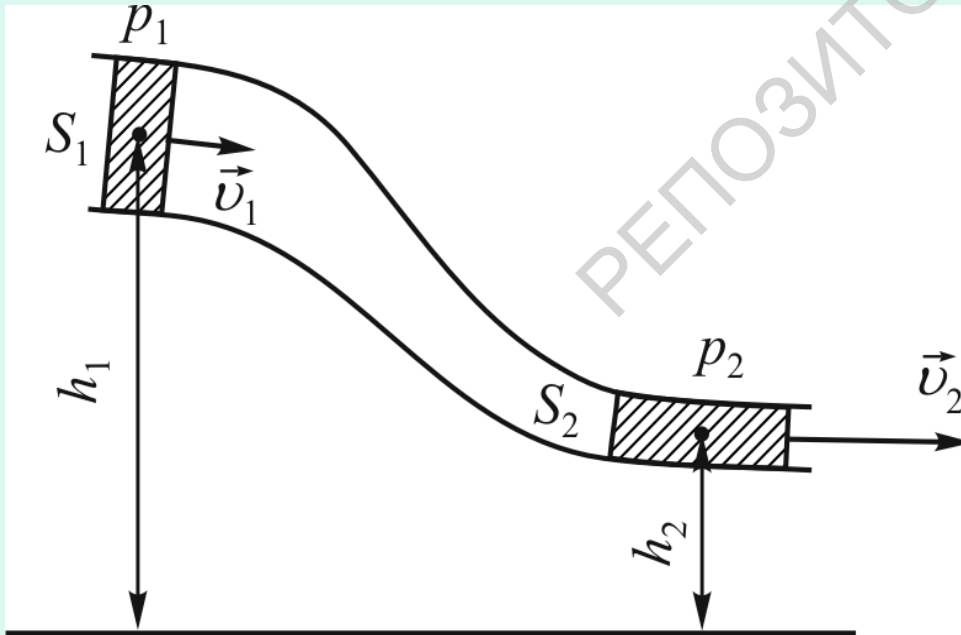


Внешними силами, которые действуют на эту массу жидкости, являются ее сила тяжести Δmg и силы давления со стороны жидкости, которая находится позади этой массы, $F_1 = p_1 S_1$ и со стороны жидкости, находящейся перед ней, $F_2 = p_2 S_2$.



Если рассматривать эту массу в качестве физической системы, которая находится в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, то изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости согласно теореме об изменении кинетической энергии равно сумме работ силы тяжести и сил давления, т. е.

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta m g (h_1 - h_2) + (p_1 - p_2) \Delta V .$$



$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta m g (h_1 - h_2) + (p_1 - p_2) \Delta V .$$

После **деления** левой и правой частей полученного равенства **на объем** ΔV , сгруппировав члены с одинаковыми индексами, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 .$$

Так как **сечения** S_1 и S_2 взяты произвольно, то для любого сечения трубки тока

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} .$$

Полученное соотношение называют **уравнением Бернулли**.

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}$$

Согласно уравнению Бернулли, при стационарном течении идеальной жидкости сумма ее статического ($p + \rho gh$) и динамического ($\rho v^2/2$) давлений постоянна в любом сечении трубы тока.

Анализируя уравнение Бернулли, можно также прийти к выводу, что оно выражает закон сохранения энергии для единицы объема жидкости: $\rho v^2/2$ — кинетическая энергия единицы объема жидкости, ρgh — его потенциальная энергия в поле силы тяжести, p — работа силы давления при подъеме единицы объема на единичную высоту.

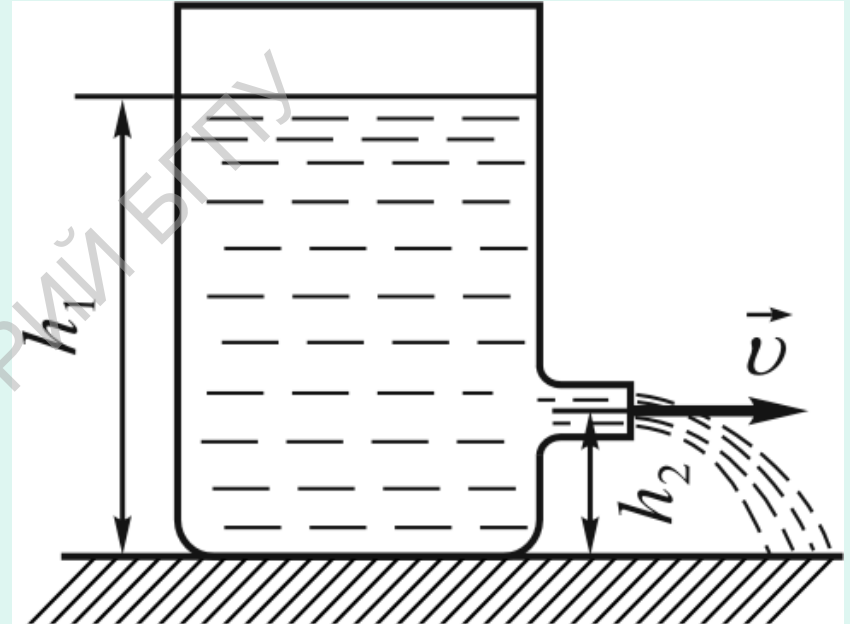
Это уравнение, полученное для идеальной жидкости, применимо также и к газам в тех случаях, когда сжимаемостью и внутренним трением газа можно пренебречь.

Как показывают расчеты и подтверждено экспериментально, при движении газов со скоростями, меньшими скорости распространения звука в них, газы можно считать идеальной несжимаемой жидкостью и применять к ним уравнение Бернулли.

Формула Торричелли

Найдем скорость вытекания жидкости из отверстия в стенке или в дне сосуда.

Пусть уровень свободной поверхности жидкости по отношению ко дну сосуда находится на высоте h_1 , а на высоте h_2 над дном сосуда имеется отверстие.



Выделим в сосуде трубку тока, одно из сечений которой совпадает с отверстием, а второе находится на свободной поверхности жидкости.

Применяя к данной трубке тока уравнение Бернулли, получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 ,$$

где p_1 и p_2 — давления на свободной поверхности жидкости и в точках отверстия соответственно.

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 .$$

После соответствующего анализа приходим к следующим
выводам: $v_1 = 0$ (т.к. $v_2 \gg v_1$) и $p_1 = p_2$.

Следовательно:

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 .$$

Откуда

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} .$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} .$$

Как видно, скорость истечения жидкости из отверстия **равна** скорости свободного падения тела с той же **высоты**.

Полученную формулу называют **формулой Торричелли**.

Если отверстие в дне сосуда, то $h_2 = 0$.

Тогда

$$v = \sqrt{2gh} .$$

Течение жидкости в трубке переменного сечения

Рассмотрим трубку тока, расположенную горизонтально ($h_1 = h_2$).

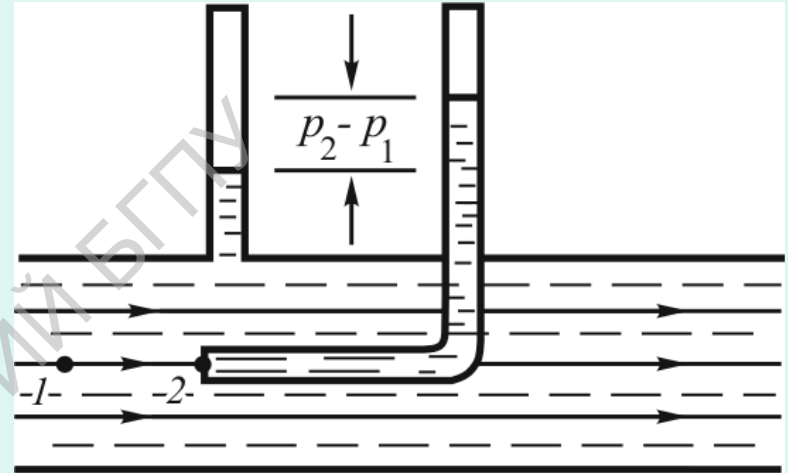
Уравнение Бернулли для двух сечений горизонтальной трубки тока будет иметь вид:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 .$$

Из этого уравнения и уравнения неразрывности струи видно, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужений, давление же больше в широких местах.

Поместим в поток движущейся жидкости **манометрическую трубку**, нижнее отверстие которой параллельно линиям тока жидкости.

С помощью такой трубки по высоте столба жидкости в ней можно измерять **статическое давление** в потоке жидкости.



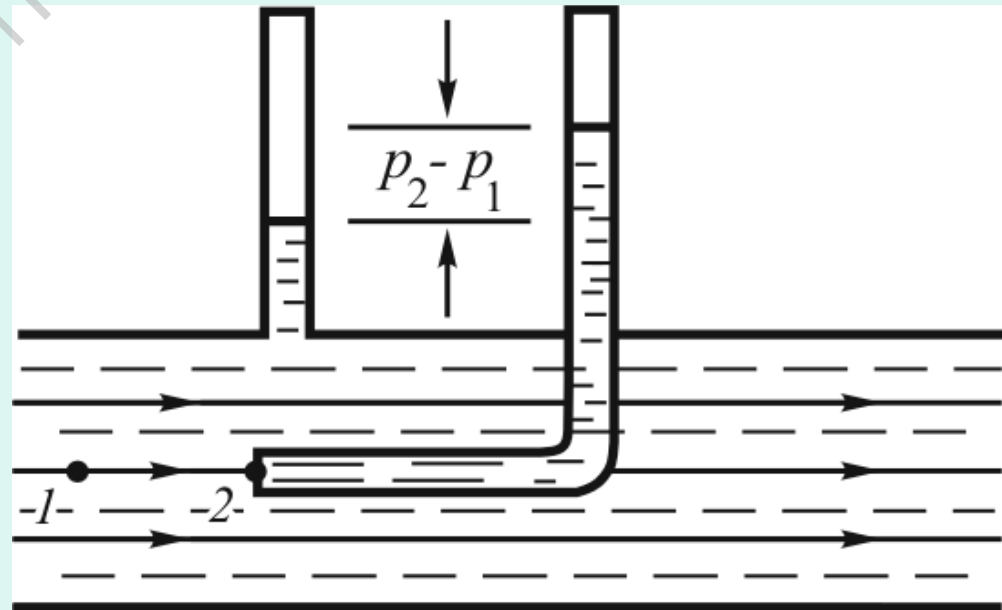
Введем также в этот поток **изогнутую манометрическую трубку**, входное отверстие которой направлено навстречу потоку жидкости.

Такую трубку называют **трубкой Пито**.

Выберем в потоке жидкости горизонтальную трубку тока и запишем уравнение Бернулли для сечений **1** и **2**. Сечение **2** совпадает с сечением входного отверстия **трубки Пито**, а сечение **1** находится в невозмущенном потоке жидкости.

В сечении **2** скорость частиц жидкости уменьшается до нуля, следовательно, **давление, измеряемое трубкой Пито**, в соответствии с уравнением Бернулли

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$



Манометрическая трубка с отверстием, обращенным навстречу потоку, измеряет сумму статического и динамического давлений.

По принципу работы трубки Пито созданы приборы для измерения скорости потока жидкости или для измерения скорости движения тел в неподвижной жидкой или газовой среде, например, для определения скорости самолета в неподвижной воздушной среде.

На таких же принципах основаны различные приборы для измерения полной массы протекающей жидкости за некоторый промежуток времени (водомеры и газомеры).

При больших скоростях течения жидкости в узких частях трубки давление p может оказаться сильно пониженным.

Жидкость, протекающая по узким частям трубки, в этом случае будет находиться в состоянии всестороннего растяжения и струя жидкости в результате будет при этом оказывать засасывающее действие.

На понижении давления в узких местах трубок основаны многочисленные физические и технические приборы — водоструйные насосы, ртутные насосы, инжекторы, пульверизаторы, карбюраторы двигателей внутреннего сгорания и т. п.

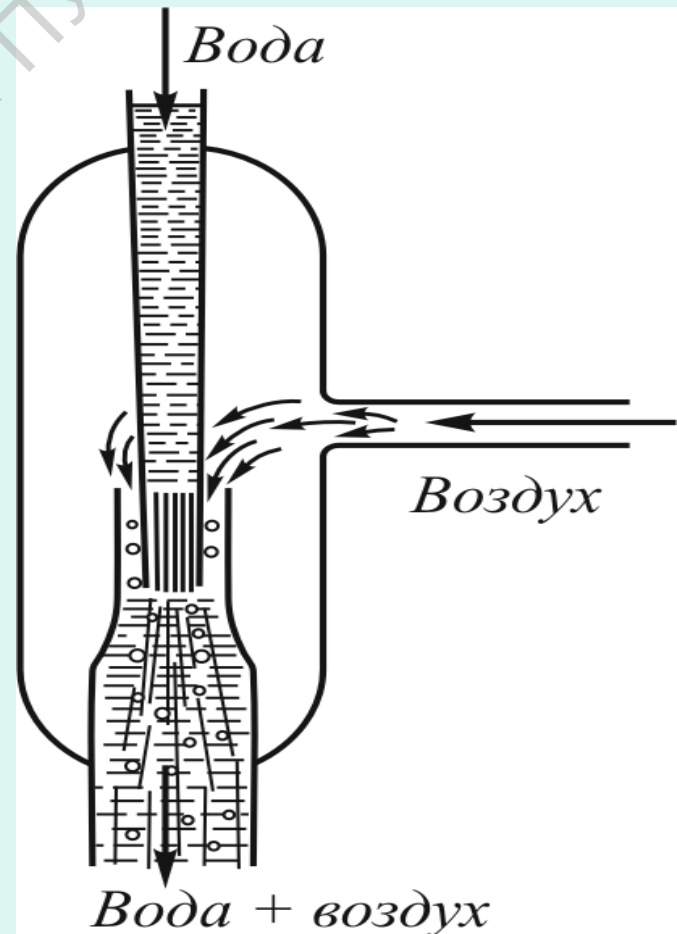
В водоструйном насосе вода из водопровода попадает в трубку, которая в конце сужена.

В этом месте вода приобретает большую скорость, а давление сильно падает, сюда засасывается воздух (или другой газ) из трубки, соединенной с резервуаром, откуда производят откачивание.

Вода, разбитая на капли, стекает вместе с воздухом.

Водоструйные насосы, будучи простыми по устройству и эксплуатации, широко применяются в лабораториях и позволяют создавать разрежение до 90 Па.

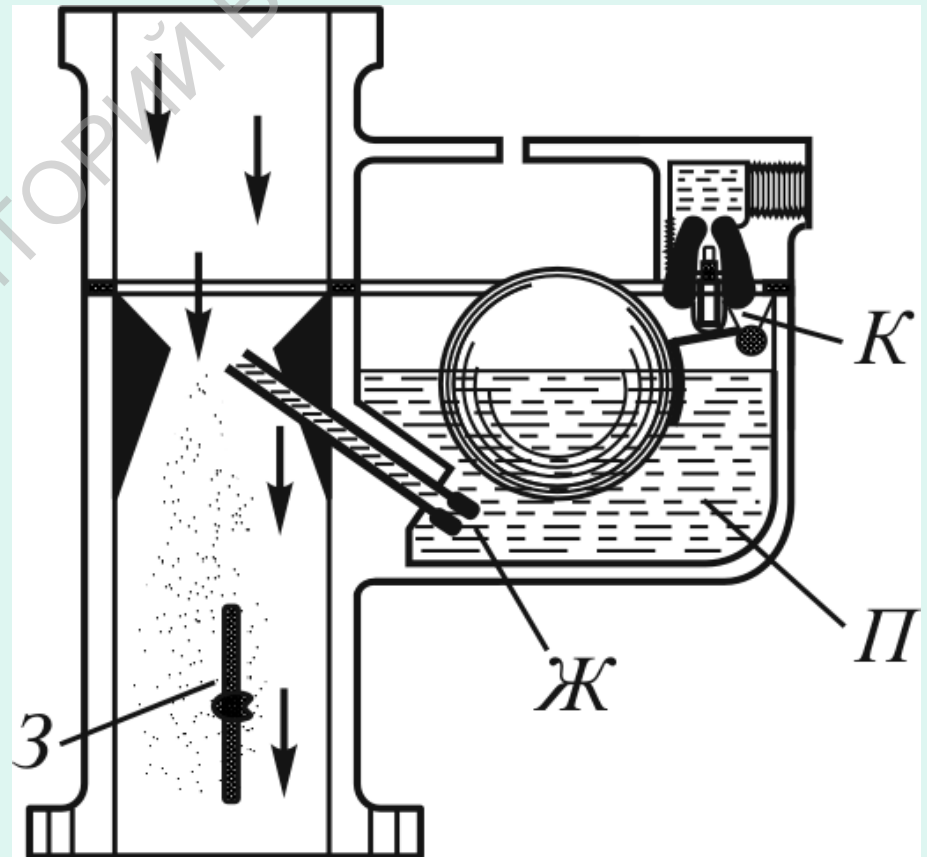
Пароструйные ртутные насосы позволяют создавать разрежение до 0,01 Па.



В карбюраторе воздух, засасываемый в камеру сгорания двигателя, движется по каналу, сечение которого уменьшается при помощи заслонки **З**, вследствие чего его скорость возрастает, а давление понижается.

В итоге струя воздуха засасывает жидкое топливо из поплавковой камеры **П** через тонкую трубку **Ж**, называемую жиклером, и, распыляя его, увлекает за собой в камеру сгорания.

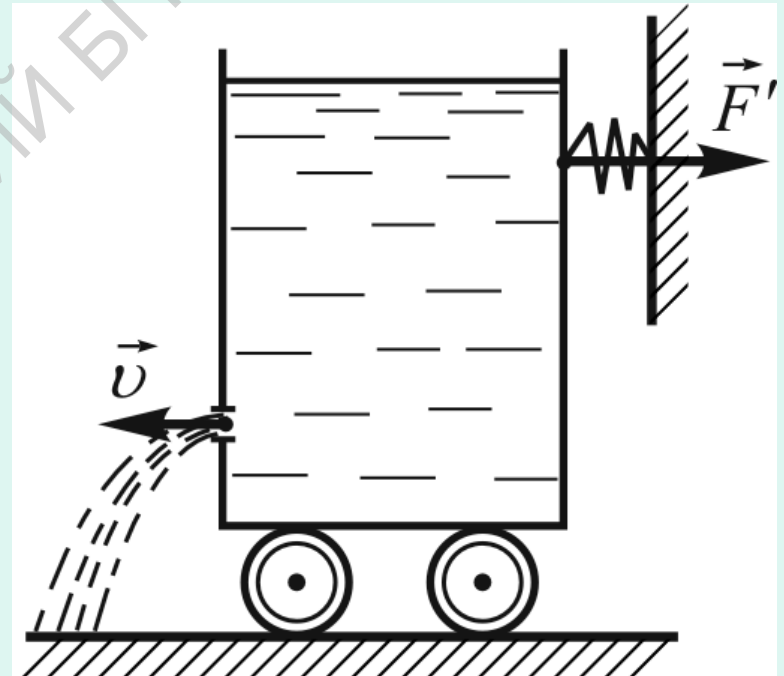
Постоянный уровень топлива в камере **П** поддерживается с помощью клапана **К**, через который камера сообщается с бензобаком.



Реакция вытекающей струи

Пусть в боковой стенке сосуда, содержащего жидкость, имеется закрывающееся отверстие площадью S , через которое жидкость может вытекать из сосуда.

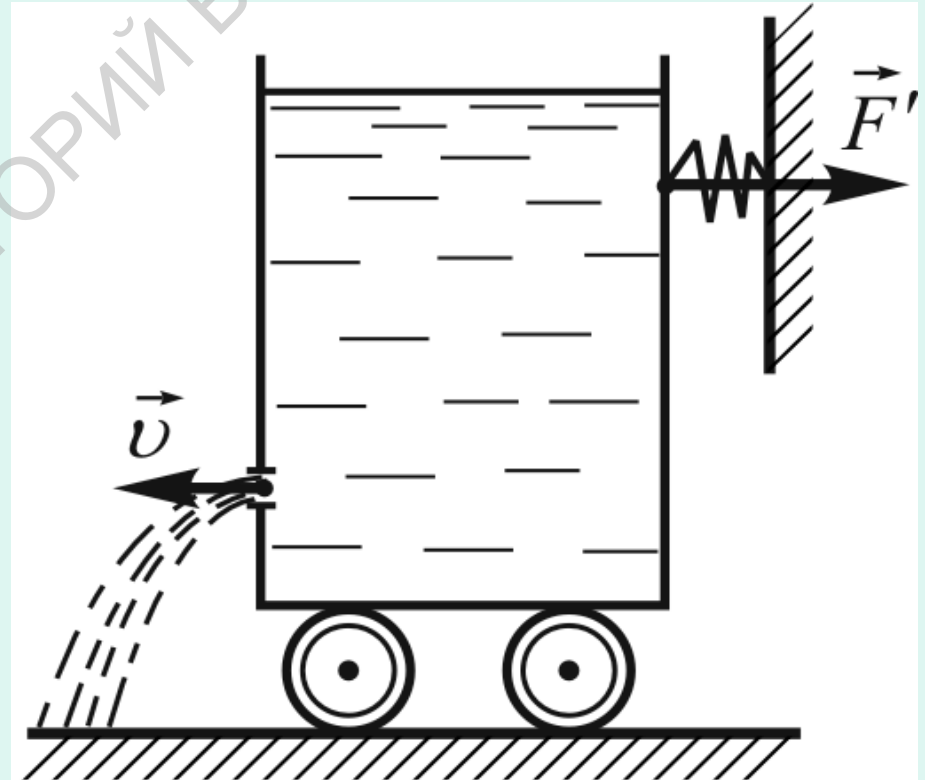
В соответствии с **законом сохранения импульса механической системы** **сосуд—вытекающая жидкость** изменение импульса данной системы при отсутствии внешних сил должно быть равно **нулю**.



Применение закона сохранения импульса дает возможность определить силу реакции струи текущей жидкости на стенки сосуда, в котором она движется.

Вытекающая жидкость за время dt уносит импульс $dm\vec{v}$, где $dm = \rho S v dt$ — масса вытекающей жидкости плотностью ρ за время dt , v — ее скорость, определяемая по формуле Торричелли.

Это означает, что со стороны вытекающей жидкости на сосуд будет действовать сила $\vec{F}'$, называемая силой реакции, которая и сообщает сосуду ускорение.



Импульс, приобретаемый жидкостью за время dt , будет

$$dmv = \rho S v^2 dt .$$

Согласно второму закону Ньютона

$$\rho S v^2 dt = F dt .$$

Откуда модуль силы $\vec{F}$, действующей на вытекающую жидкость

$$F = \rho S v^2 .$$

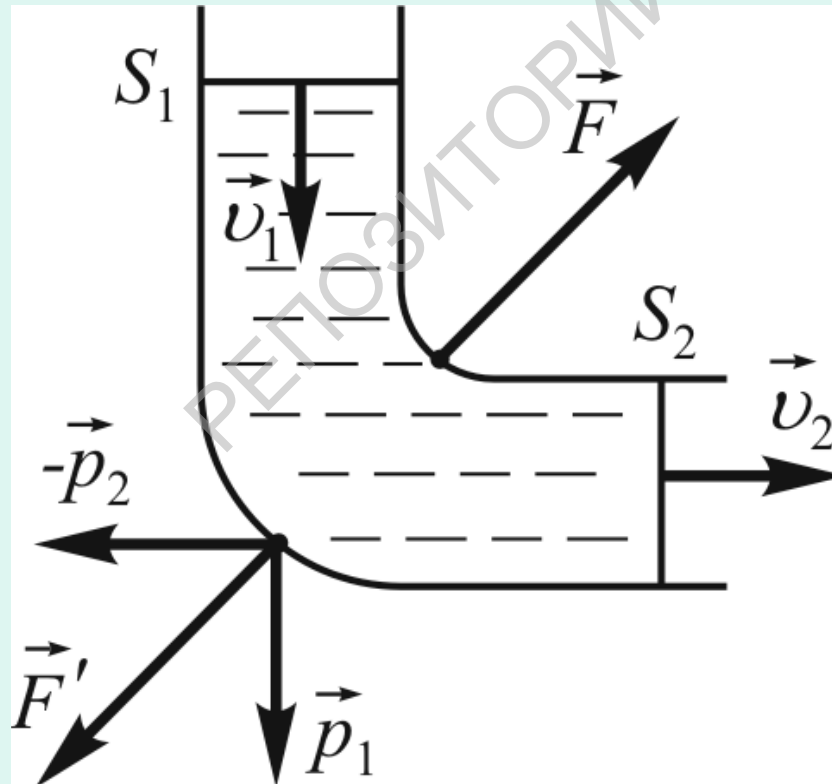
В соответствии с третьим законом Ньютона равная по модулю, но противоположная по направлению сила $\vec{F}'$ должна действовать со стороны вытекающей жидкости на сосуд

$$F' = \rho S v^2 .$$

Сила реакции возникает и в том случае, когда скорость течения постоянна по модулю, но изменяется по направлению.

Рассмотрим случай, когда жидкость течет по трубе постоянного сечения, плавно изогнутой под углом 90° .

Если движение стационарное, то скорости во всех сечениях трубы по модулю одинаковы.



Через сечение S_1 , расположенное до поворота трубы, жидкость за время dt переносит импульс $\vec{p}_1 = (\rho S_1 v_1) \vec{v}_1$, через сечение S_2

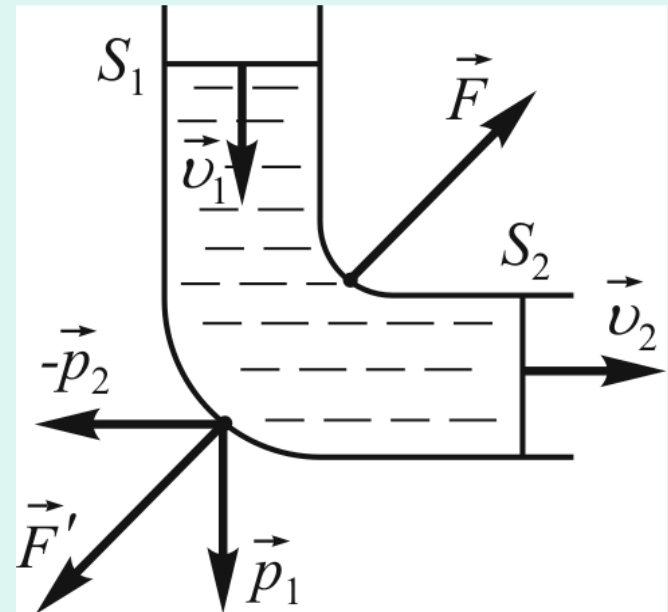
— импульс $\vec{p}_2 = (\rho S_2 v_2) \vec{v}_2$.

Поскольку $S_1 = S_2 = S$ и $v_1 = v_2 = v$, то

$$d\vec{p} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt$$

Следовательно,

$$\vec{F} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$



Модуль силы реакции в этом случае, как видно из рисунка, будет

$$F' = \sqrt{2\rho S v^2} .$$

На существовании силы реакции такого типа основано действие водяных или паровых турбин.

Струя жидкости или пара, протекая по искривленным каналам колеса турбины, создает силы реакции, момент которых и вызывает вращение колеса турбины.

