Інтэгральнае выяўленне Пампею–Фёдарава для рашэнняў адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў

Прадметам даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g(x, y), \ \frac{\partial f}{\partial t} = h(x, y), \qquad (1)$$

дзе $g = g(x, y)$, $h = h(x, y)$ ($f = f(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$) – вядомыя (шуканыя) рэчаісныя або камплексныя функцыі рэчаісных зменных x, y, непарыўна дыферэнцавальныя ў некаторым адназвязным абсягу D; $z = x + iy$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$; $t = t(x, y)$ – зададзеная камплексная ці рэчаісная функцыя класа $C^1(D)$, пры гэтым $\delta \equiv t'_y - it'_x \neq 0$ у абсягу D.

Лёгка паказаць, што сістэма (1) эквівалентная наступнаму раўнанню ў фармальных вытворных:

$$\frac{\partial w(z)}{\partial Q} = A(z), \qquad (2)$$

дзе $\frac{\partial w}{\partial Q} = \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, $P = z + \varepsilon t(x, y)$, $Q = t(x, y)$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h(z) = h(x, y)$, $g(z) = g(x, y)$, $A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$, $w = w(z) = f(x, y) + \varepsilon\varphi(x, y)$.

Даследавалася наступная краявая задача: знайсці рашэнне $w = w(z) \in C^1(D)$ раўнання (2) (сістэмы (1)), калі вядомыя значэнні гэтага рашэння на граніцы C абсягу $D_C \subset D$.

Для дуальнай функцыі $w = w(z) \in C^1(D)$ атрымана наступнае інтэгральнае выяўленне Пампею–Фёдарава:

$$w(z_0) = \frac{1}{k}\left\{\int_C w(z)\frac{dP(z)}{P - P_0} + \iint_{D_C} A(z)\frac{t'_y - it'_x}{P - P_0}dxdy\right\}, \qquad (3)$$

дзе $P = P(z) = z + \varepsilon t(z)$, $P_0 = P(z_0) = z_0 + \varepsilon t(z_0)$, $z = x + iy \in C$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_C$, C – граніца абсягу D_C, $A(z) = h(z) - \varepsilon g(z)$, $k = \int_\gamma \frac{dP}{P - P_0}$, γ – акружнасць з цэнтрам у пункце z_0 і дастаткова малога радыуса.

Інтэгральнае выяўленне (3) і дае рашэнне краявой задачы.