Лекция 15. Движение в гравитационном поле

Содержание

Законы Кеплера

Основанием для установления закона всемирного тяготения Ньютону послужили открытые в начале XVII ст. на основе астрономических наблюдений немецким астрономом Кеплером (1571—1630) три закона движения планет Солнечной системы, которые были сформулированы следующим образом.

1. Все планеты Солнечной системы движутся по плоским замкнутым криволинейным траекториям, имеющим форму эллипса, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор, определяющий положение планеты на орбите, за равные промежутки времени описывает равные площади.

3. Квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Первый закон Кеплера о движении планет Солнечной системы следует из решения задачи о движении тел в центральном поле.

Будем считать, что планета движется только под действием гравитационных сил притяжения Солнца, не обращая при этом внимания на влияние других планет. В данном случае Солнце и планеты можно принимать за материальные точки. При таких допущениях задача сводится к изучению движения материальной точки в центральном гравитационном поле.

Результаты решения этой задачи показывают, что траектории движения тел лежат в плоскости и представляют собой эллипс.

Второй закон Кеплера является следствием закона сохранения момента импульса.

При рассмотрении движения планеты в центральном гравитационном поле систему отсчета свяжем с центром поля, т. е. с Солнцем.

Сила гравитационного притяжения, действующая на планету, в этом случае всегда проходит через центр Солнца, а ее момент относительно этого центра равен нулю.

Поэтому в соответствии с основным уравнением динамики вращательного движения $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ и законом сохранения момент импульса планеты не будет изменяться:

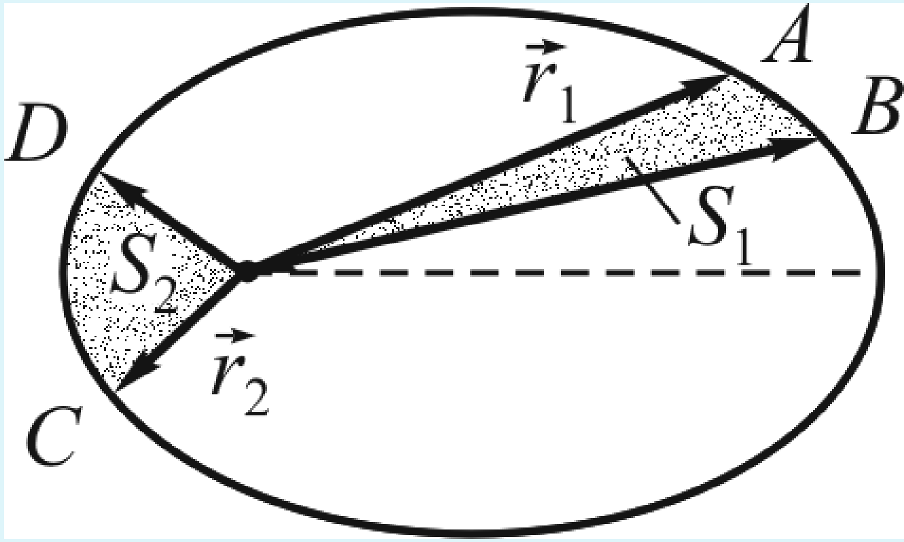
$$\vec{L} = const.$$

Вектор момента импульса $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Если $\vec{L} = const$, то движение планеты происходит в одной плоскости, которая не изменяет своей ориентации в пространстве.

Таким образом, траектория планеты, движущейся в центральном поле, является плоской кривой.

Пусть планета за интервал времени Δt перемещается из положения A в положение B. Радиус-вектор, определяющий положение планеты на орбите, описывает при этом площадь S_1.

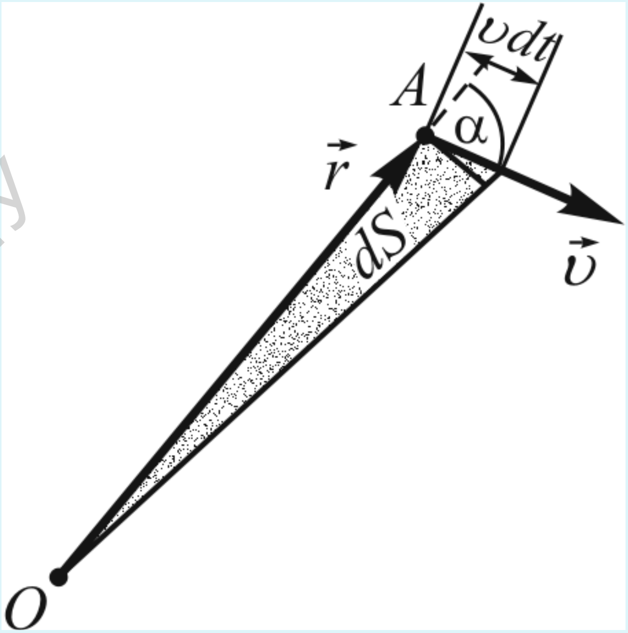


При движении планеты из положения C в положение D за тот же интервал времени радиус-вектор описывает площадь S_2.

Согласно закону Кеплера $S_1 = S_2$.

Рассмотрим перемещение планеты, соответствующее бесконечно малому интервалу времени dt.

Тогда площадь, описываемая радиусом-вектором $\vec{r}$ за интервал времени dt, приближенно равна



$$dS = \frac{1}{2} r\upsilon \sin\alpha \, dt ,$$

где α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$.

Из постоянства момента импульса планеты относительно центра Солнца следует

$$r\upsilon \sin\alpha = \mathrm{const} .$$

Откуда $$\frac{dS}{dt} = \text{const}$$.

Величину dS/dt называют секториальной скоростью.

Третий закон Кеплера можно легко доказать, если принять, что планеты движутся по круговым орбитам.

Такое допущение оправдано, потому что реальные орбиты планет не сильно отличаются от круговых.

В действительности эксцентриситет эллиптических орбит планет очень невелик.

Например, для земной орбиты он составляет $\varepsilon \approx 0,017$, для орбиты Меркурия $\varepsilon \approx 0,205$.

Рассмотрим движение двух произвольных планет Солнечной системы по круговым орбитам.

Пусть планета имеет массу m_1, радиус орбиты R_1 и период обращения T_1, а вторая планета соответственно m_2, R_2, T_2.

Запишем второй закон Ньютона для каждой планеты

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{R_1} = G\frac{m_1 M}{R_1^2}, \qquad \frac{m_2 \upsilon_2^2}{R_2} = G\frac{m_2 M}{R_2^2}.$$

где М — масса Солнца.

Линейная скорость движения планеты по орбите $\upsilon = 2\pi R/T$. Подставив значения υ_1^2 и υ_2^2 в предыдущие формулы,

получим: $$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{GM}{4\pi^2}, \qquad \frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

После простых преобразований находим: $$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Космические скорости

Рассмотрим движение спутника массой m по круговой орбите вокруг Земли.

Высота орбиты спутника над поверхностью Земли — h .

Движение спутника происходит только под действием силы гравитационного притяжения со стороны Земли, которая является центростремительной, с линейной скоростью $\upsilon_{\text{кр}}$

$$\frac{m\upsilon_{\text{кр}}^2}{R_з + h} = G\frac{mM}{\left(R_з + h\right)^2},$$

где M — масса Земли, $R_з$ — радиус Земли.

Как отмечалось ранее, без учета вращения Земли можно считать, что сила гравитационного притяжения, действующая на спутник, равна силе тяжести:

$$G\frac{mM}{\left(R_{з}+h\right)^{2}}=mg$$.

С учетом этого $\upsilon_{кр}=\sqrt{g\left(R_{з}+h\right)}$

Учитывая зависимость силы тяжести от высоты над поверхностью Земли

$$g=g_{0}\left(\frac{R_{\text{Ç}}}{R_{\text{Ç}}+h}\right)^{2}$$

(g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли), получим:

$$\upsilon_{кр}=\sqrt{g_{0}\frac{R_{з}^{2}}{R_{з}+h}}$$ или $$\upsilon_{кр}=\upsilon_{1}\sqrt{\frac{R_{з}}{R_{з}+h}}$$,

где $$\upsilon_{1}=\sqrt{g_{0}R_{з}}$$.

Скорость υ_1 получила название первой космической скорости.

Это минимальная скорость, которую должен иметь спутник, чтобы он мог двигаться по круговой орбите на минимальной высоте около поверхности Земли.

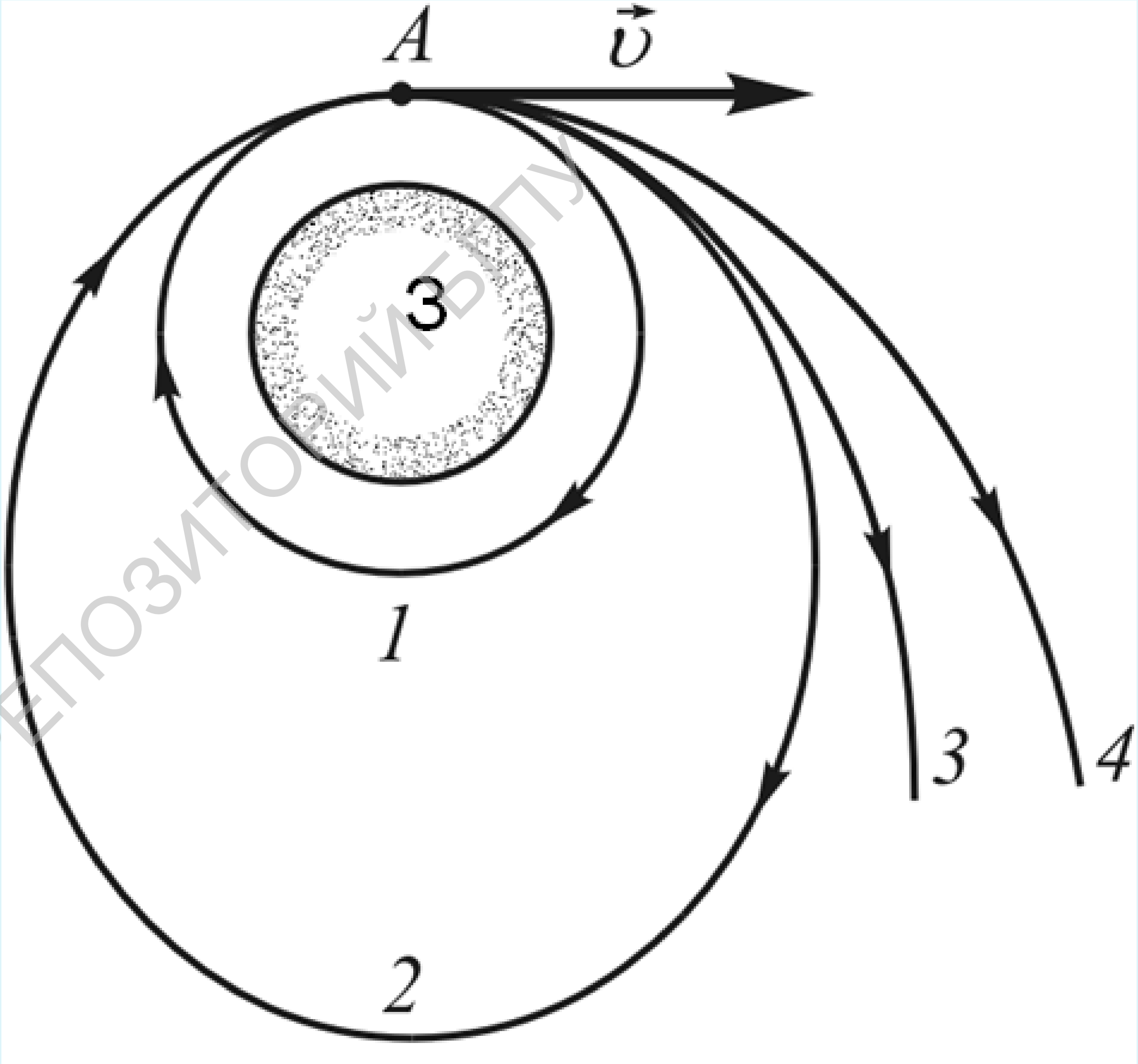
Принимая

$g_0 = 9{,}81$ м/с^2,

$R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м,

получим

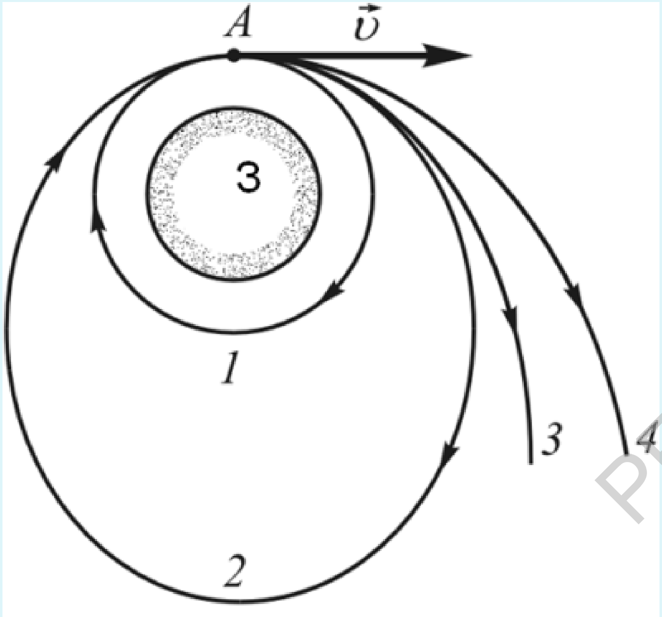
$\upsilon_1 \approx 8$ км/с.



При запуске спутника на круговую орбиту должны быть строго выдержаны величина и направление скорости ракеты-носителя в момент выключения двигателей.

Как видно из формулы, круговая скорость спутника уменьшается по мере увеличения его высоты над Землей.

$$\upsilon_{\text{кр}} = \sqrt{g_0 \frac{R_з^2}{R_з + h}}$$



Если скорость υ_1 не сильно превышает $\upsilon_{\text{кр}}$, то орбита становится эллиптической (кривая *2*).

Если орбита спутника эллиптическая, то его скорость в любой точке траектории определяется формулой:

$$\upsilon_{\text{эл}} = \upsilon_{\text{кр}} \sqrt{2 - \frac{R_з + h}{a}}$$

где a — большая полуось эллипса.

Рассмотрим движение спутника, посланного вертикально вверх, при отсутствии сил сопротивления среды.

Найдем скорость υ_2, которую необходимо сообщить спутнику для преодоления сил притяжения Земли.

При движении спутника запас его кинетической энергии расходуется для выполнения работы против гравитационных сил.

Изменение кинетической энергии спутника равно работе силы гравитационного притяжения

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2} = -\int_{R_3}^{\infty} G\frac{mM}{R^2}dR,$$

где R — расстояние от центра Земли до спутника.

Предположим, что конечная скорость спутника равна нулю. В этом случае последнее соотношение примет вид:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_{R_З}^{\infty} G\frac{mM}{R^2}dR \; .$$

После интегрирования правой части равенства получим:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = G\frac{mM}{R_З} \; .$$

Из последнего равенства выразим начальную скорость спутника

$$\upsilon_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R_З}}\ .$$

Откуда с учетом υ_1 получим:

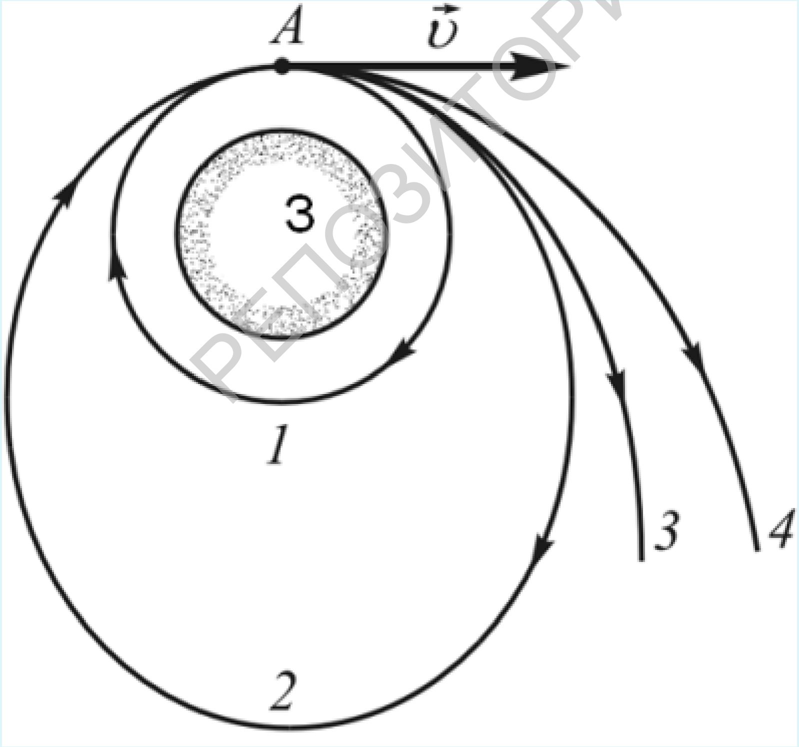
$$\upsilon_2 = \sqrt{2g_0R_З} = \sqrt{2}\upsilon_1\ .$$

Данная скорость получила название второй космической скорости, она равна 11,2 км/с.

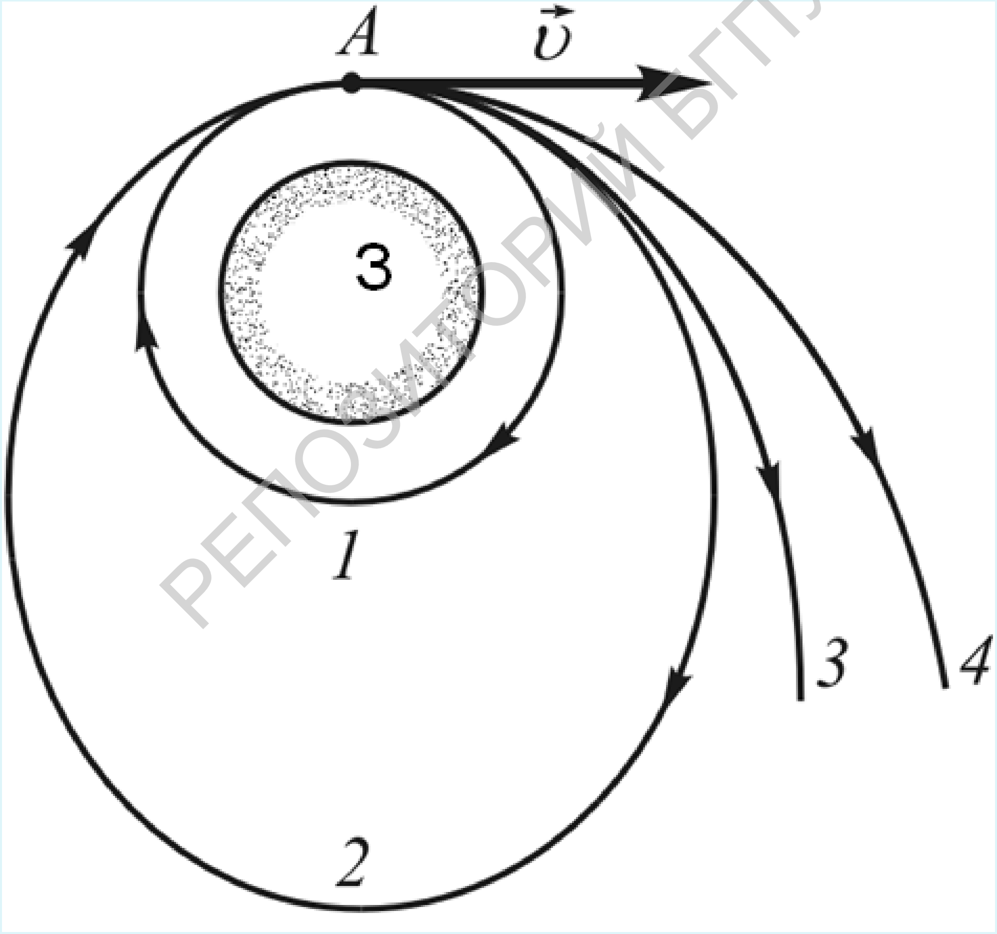
Это наименьшая начальная скорость, которую необходимо сообщить спутнику, чтобы он никогда не вернулся на Землю или по-другому: чтобы вывести его из сферы гравитационного притяжения Земли.

Если спутнику сообщается вторая космическая скорость, то он движется по параболической траектории (3).

Расчеты показывают, что при движении ракеты-носителя в атмосфере для выхода за пределы сферы гравитационного притяжения Земли она должна иметь скорость 12—14 км/с.



Третьей космической скоростью называется минимальная начальная скорость, при которой тело, начиная движение вблизи поверхности Земли, преодолевает земное притяжение, затем притяжение Солнца и **покидает Солнечную систему** (траектория 4).



При рассмотрении движения тела вне сферы действия Земли его начальная и геоцентрическая скорости находятся в результате векторного сложения геоцентрической скорости аппарата со скоростью движения Земли вокруг Солнца по орбите, близкой к круговой.

Значение третьей космической скорости зависит от того, в каком направлении корабль выходит из зоны земного тяготения.

В случае, когда запуск производится в направлении орбитального движения Земли вокруг Солнца третья космическая скорость минимальна и равна приближенно

$\upsilon_3 = 16,7$ км/с.