УДК 517.95

В.А. ШИЛИНЕЦ, Г.А. СКРЕБЕЦ, Ж.С. ТОПОЛЬ
Минск, БГПУ имени М. Танка

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В данной работе с помощью бикомплексных функций, моногенных в смысле В.С. Федорова [1], исследуется следующая каноническая система дифференциальных уравнений в формальных производных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}&=a_1 f+a_2 f^2+b_1\varphi+b_2\varphi^2+c_1 f\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}&=a_3 f+a_4 f^2+b_3\varphi+b_4\varphi^2+c_2 f\varphi,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где $a_k, b_k, c_i\,(k=1,\ldots,4;\, i=1,2)$ (f,φ) – известные (искомые) комплексные функции от x, y. Все функции, рассматриваемые в настоящей статье, предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями действительных переменных x, y в некоторой односвязной области D. Обозначаем через $p(x,y), q(x,y)$ две такие комплексные функции, для которых $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ в рассматриваемой области. Операторы $\frac{\partial}{\partial q}$ и $\frac{\partial}{\partial p}$ определяются следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\equiv\frac{1}{\delta}\left(f'_x q'_y - f'_y q'_x\right),\ \frac{\partial f}{\partial q}\equiv\frac{1}{\delta}\left(f'_y p'_x - f'_x p'_y\right).$$

Для всякой бикомплексной непрерывно дифференцируемой функции $F(x,y)$ вводим следующие дифференциальные операторы:

$$\frac{\partial F}{\partial P}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}-j\frac{\partial F}{\partial q}\right),\ \frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}+j\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

$$\left(P=p+jq, Q=p-jq, j^2=-1, j\neq i\right).$$

Легко показать, что для этих операторов имеют место обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного. Кроме того, имеем

$$\frac{\partial(f+j\varphi)}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)+j\left(\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right].$$

Также легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $a_1=b_3, b_1=-a_3, a_2=-b_2, a_4=-b_4, b_2=-\frac{c_2}{2}, b_4=\frac{c_1}{2}$, *то система* (1) *эквивалентна следующему дифференциальному уравнению в формальных производных*:

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=AF+BF^2,\tag{2}$$

где $F=f+j\varphi$, $A=\frac{1}{4}\left((a_1+b_3)+j(a_3-b_1)\right), B=\frac{1}{4}\left((a_2-b_2)+j(a_4-b_4)\right),$

$$j^2=-1, j\neq i.$$

Найдем общее решение уравнения (2), где F – неизвестная бикомплексная функция, A,B – известные бикомплексные функции, причем предполагаем, что A и B – функции, моногенные в смысле В.С. Федорова по функции $Q = p - jq$ в области D.

Полагаем $u = \int\limits_{M_0}^{M} AdQ,\ F\exp(-u) = v$. При этом имеем: u – моногенная в смысле В.С. Федорова функция по функции Q;

$$\frac{du}{dQ} = \frac{\partial u}{\partial Q} = A, \tag{3}$$

где $\frac{du}{dQ}$ – производная в смысле В.С. Федорова; $F = \exp(u)v$.

Уравнение (2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \exp(u)\frac{\partial u}{\partial Q}v + \exp(u)\frac{\partial v}{\partial Q} = A\exp(u)v + B\exp(2u)v^2,$$

откуда и из (3) получим, что

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B\exp(u)v^2. \tag{4}$$

Полагая $\omega = -\frac{1}{v}$, имеем $\frac{\partial \omega}{\partial Q} = \frac{\frac{\partial v}{\partial Q}}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2\frac{\partial \omega}{\partial Q}$.

Из равенства (4) получим, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = B\exp(u). \tag{5}$$

По определению $f = \exp(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}$, откуда

$$\Delta f = \exp u(\exp\Delta u - 1) = \exp u\left(\Delta u + (\Delta u)^2 + \ldots\right)\ (\Delta u = u(M') - u(M)).$$

Из последнего равенства имеем: если функция u – моногенная в смысле В.С. Федорова по функции Q, тогда $\exp u$ – также моногенная функция по функции Q в области D, причем $\frac{\partial(\exp u)}{\partial Q} = \exp u\frac{\partial u}{\partial Q}$.

Следовательно, $B\exp u$ есть функция, моногенная в смысле В.С. Федорова по функции Q в области D.

Из (5) следует, что $\frac{\partial}{\partial Q}\left(\omega - \int\limits_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ\right) = 0$, т.е. $\omega - \int\limits_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ = \Phi[P]$, где $\Phi[P]$ – моногенная по функции P в области D функция.

Таким образом,

$$F = \exp(u) \cdot v,$$

где

$$u = \int_{M_0}^{M} A dQ,\ v = -\frac{1}{\omega},\ \omega = \int_{M_0}^{M} B \exp(u) dQ + \Phi[P],$$

$\Phi[P]$ – моногенная в области D по функции P функция.

Замечание. Пусть в уравнении (2) A и B – некоторые постоянные. Тогда полагаем

$$u = AQ, F \cdot \exp(-u) = v.$$

Уравнение (2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B \exp(AQ) v^2. \tag{6}$$

Полагаем $\omega = -\frac{1}{v}$, тогда $\frac{\partial \omega}{\partial Q} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial Q}}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2 \frac{\partial \omega}{\partial Q}$. Из равенства (6) имеем: $\frac{\partial \omega}{\partial Q} = B \exp(AQ)$, откуда $\omega = \frac{B}{A} \exp(AQ) + \Phi[P]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фёдоров, В.С. Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.