УДК 517.9

А.Х. УАЗИЗ
Минск, БГПУ имени М. Танка

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К НЕКОРРЕКТНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ, В РАМКАХ МНЕМОФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОДХОДА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

При моделировании различных физических, экономических и биологических систем, для которых характерно наличие импульсного воздействия, вызывающего изменения состояния системы, протекающие значительно быстрее, чем собственные динамические процессы приходят к многомерным нелинейным дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью, которые не имеют решения в классическом смысле и потому трактуются с различных позиций. В нашем докладе будет рассматриваться двумерная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = X_0, \ t \in T. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $X : T \to \mathbb{R}^2$ – неизвестная вектор-функция, $T = [0; a]$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ – матрично-значная функция двух переменных $f(x_1, x_2) = \left(f^{ij}(x_1, x_2)\right)$, $i = 1,2; j = 1,2$, где $f^{ij}(x_1, x_2)$ – удовлетворяют условию Липшица по обеим переменным. Наконец, $L(t)$ – вектор-функция столбец $L(t) = \left(L^1(t), L^2(t)\right)$, где $L^i(t)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, причем $L^i(0) = 0$ и $L^i(a-0) = L(a)$, и поэтому производная $\dot{L}(t)$ понимается как обобщенная и вычисляется покоординатно.

Среди множества методов исследования данной задачи, возникающих в силу того, что произведение функций, входящих в правую часть, не определено корректно, следует выделить так называемый мнемофункциональный метод (смотри, например [1]). В основе указанного метода лежит переход от формальной задачи (1) к задаче Коши в дифференциалах в алгебре мнемофункций, при этом под решением исходной задачи понимается ассоциированное решение соответствующей задачи Коши в дифференциалах.

Следуя данному подходу, задаче Коши (1) поставим в соответствие уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}}\tilde{X}(\tilde{t}) = \tilde{f}\left(\tilde{X}(\tilde{t})\right)d_{\tilde{h}}\tilde{L}(\tilde{t}), \\ \tilde{X}\Big|_{[\tilde{0},\tilde{h})} = \tilde{X}_0. \end{cases} \tag{2}$$

На уровне представителей данная задача, записанная покоординатно, имеет вид многомерной конечно-разностной задачи с осреднением:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = f_n^{i1}(X_n(t))[L_n^1(t+h_n) - L_n^1(t)] + f_n^{i2}(X_n(t))[L_n^2(t+h_n) - L_n^2(t)] \\ X_n^i(t)\Big|_{[0,h_n)} = X_{n0}^i(t),\ i = 1,2. \end{cases} \tag{3}$$

Говорят, что задача (2) ассоциирует задачу (1), а решение $\tilde{X}$ задачи (2), если оно существует, является ассоциированным решением задачи (1). Отметим, что решение задачи (2) будет ассоциировать некоторую функцию X тогда и только тогда, когда решение X_n конечно-разностной задачи (3) будет сходиться к ней в некотором топологическом пространстве.

В качестве представителей обобщенной функции $\tilde{f}$, ассоциирующей функцию f, будем использовать свёртки со стандартными «шапочками», то есть

$$f_n(t) = (f * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} f(t+s)\rho_n(s)ds,\ \rho_n(t) = n\rho(nt),\ \rho(t) \geq 0,$$

$$\operatorname{supp}\ \rho \subset [0,1] \text{ и } \int_0^1 \rho(s)ds = 1.$$

В рамках указанного подхода нами исследуется вопрос о предельном поведении решений конечно-разностной задачи (3), которая ассоциирует задачу (1), при использовании в качестве представителей L_n обобщенной функции $\tilde{L}$, ассоциирующей функцию L из формальной задачи (1), её полиномиальных аппроксимаций, вместо сверток (данный выбор имеет преимущество, заключающееся в том, что при моделировании конечно-разностных схем вида (3) на персональном компьютере мы можем получать выигрыш в реальном машинном времени, так как полиномы являются более простым вычислительным инструментом аппроксимации).

Например, в качестве L_n^i будем использовать многочлены Бернштейна для функций L^i на отрезке $T = [0;a]$, которые задаются формулой

$$L_n^i(t) = \sum_{p=0}^{n} L^i(pa/n)C_n^p(t/a)^p(1-t/a)^{n-p}.$$

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t представляется в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0,h_n)$, $m_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Теперь легко показать, что решение системы (3) можно переписать следующим образом

$$X_n^i(t+h_n) = X_{n0}^i(\tau_t) + f_n^{i1}(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n^1(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^1(\tau_t + kh_n)] +$$
$$+ f_n^{i2}(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n^2(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^2(\tau_t + kh_n)], \quad i = 1,2.$$

Нами доказаны следующие теоремы, определяющие вид ассоциированных решений задачи (1) и условия их существования.

Теорема 1. *Решение* $X_n(t)$ *задачи (3) сходится в* $L^1(T)$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $\frac{1}{n} = o(h_n^2)$ *к решению двумерного интегрального уравнения*

$$X(t) = x_0 + \int_0^{t+} f(X(s-0))dL(s),$$

если выполняется $\int_T |X_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

Теорема 2. *Решение* $X_n(t)$ *задачи (3) сходится при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *сходится к решению многомерного интегрального уравнения*

$$X^i(t) = X_0^i + \sum_{j=1}^{p} \left(\int_0^t f^{ij}(X(t)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_l^j} \left(\varphi^i\left(\Delta L(\mu_l^j), X(\mu_l^j -), 1\right) - X^i(\mu_l^j -) \right) \right), \; t \in T,$$

где $\Delta L(\mu_l^j)$ *– величина скачков функции L в точках разрыва* μ_l^j, φ^i *– решение вспомогательного интегрального уравнения*

$$\varphi^i(w, y, \mathrm{u}) = y^i + \sum_{j=1}^{p} w_j f^{ij}(\varphi(w, y, \mathrm{u}))ds, \quad w, y \in R^2, u \in R_+,$$

если для любого $t \in T$ *выполняется* $|X_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$.

Примером задачи, приводящейся к некорректной многомерной задаче Коши вида (1), может служить модель уравновешенного вылова Бевертона-Холта. Отметим также, что решение аналогичных одномерных задач в рамках данного подхода с применением полиномов рассмотрено в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бедюк, Н.В. Неавтономные дифференциальные уравнения в алгебре мнемофункций / Н.В. Бедюк, О.Л. Яблонский // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 8–18.

2. Уазиз, А.Х. Предельное поведение решений конечно-разностных уравнений при использовании полиномиальной аппроксимации / А.Х. Уазиз, О.Л. Яблонский // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 4. – С. 24–32.