Графическое представление характеристик физических явлений при описании их векторным произведением

Использование векторного произведения при описании различных физических законов и явлений позволяет в значительной степени упростить их математический анализ, создать более простую геометрическую интерпретацию и уяснить правильную векторную связь этих соотношений.

С помощью этого произведения наиболее строго, удобно и убедительно выражать связь между векторами линейных и угловых характеристик вращательного движения материальной точки относительно неподвижного центра, а также аналитически формулировать различные силовые характеристики вращательного движения твердого тела [1, с. 64-65].

Движение материальной точки по окружности удобно описывать угловыми величинами: углом поворота φ, угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Мгновенная угловая скорость характеризует вращение в данный момент времени и равна пределу отношения или производной угла поворота точки по времени: $\omega = \lim \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

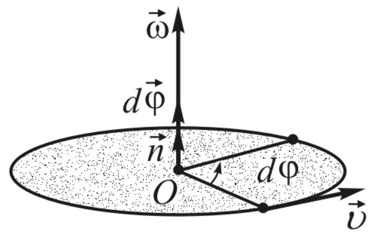


Рис.1

Угловая скорость $\vec{\omega}$, как и линейная $\vec{\upsilon}$, характеризуется величиной (числовым значением) и направлением. Так даже в одной плоскости вращение может происходить по ходу часовой стрелки или в противоположном направлении; плоскость вращения сама может изменять свое положение. Введем вектор бесконечно малого угла $d\vec{\varphi}$, который численно равен углу поворота радиуса-вектора $d\varphi$ и направлен вдоль единичного вектора нормали $\vec{n}$, таким образом, что если смотреть с вершины вектора $\vec{n}$, то поворот будет происходить против часовой стрелки (рис.1): $d\vec{\varphi} = \vec{n}d\varphi$, где модуль $|\vec{n}| = 1$. Тогда вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}\vec{n} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$, а его направление совпадает с нормалью к плоскости вращения (Рис. 1).

Учитывая, что радианной мерой угла является отношение соответствующей дуги ds к радиусу $(d\varphi = ds/r)$, а линейная скорость точки при движении по окружности численно равна $\upsilon = ds/dt$, получаем связь между величинами линейной и угловой скорости: $\upsilon = \omega r$, т. е. модуль скорости $\vec{\upsilon}$ численно равен площади прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, и перпендикулярен плоскости, в которой они расположены. Кратчайший поворот от $\vec{\omega}$ к $\vec{r}$ будет

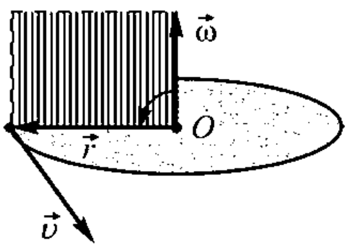
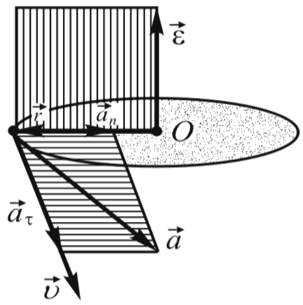


Рис.2

происходить по часовой стрелке, если смотреть вслед вектору $\vec{\upsilon}$ (рис.2). Таким образом, вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ равен векторному произведению угловой скорости и радиуса-вектора точки, в которой определяется $\vec{\upsilon}$: $\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$

Как известно, угловое и линейное тангенциальное ускорения связаны соотношением: $\varepsilon = a_{\tau} / r$. Из этой формулы и рис.3 видно, что вектор a_{τ} равен векторному произведению углового ускорения



и радиуса-вектора $\vec{r}$: $a_{\tau} = \varepsilon, r$. Нормальное ускорение численно равно $a_n = \upsilon^2 / r = \omega^2 r$ и направлено к центру кривизны противоположно $\vec{r}$, поэтому $a_n = -\omega^2 r$. Вектор полного ускорения точки $a = a_{\tau} + a_n = \varepsilon, r = -\omega^2 r$ (см. рис. 3) [2, с. 33-36].

Рис.3

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки описывают окружности с центрами, лежащими на одной прямой, называемой осью вращения. Силовой характеристикой вращательного движения является момент силы.

Моментом силы относительно точки O называется векторное произведение $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы (рис.4). Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются данные векторы: $M = rF\sin\varphi$.

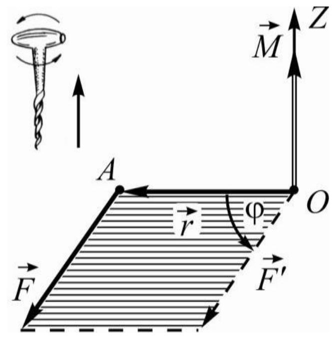


Рис.4

Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу векторного произведения: если смотреть вслед вектору $\vec{M}$, то кратчайший поворот от радиуса-вектора $\vec{r}$ к силе $\vec{F}$ будет происходить по часовой стрелке (рис.4). На практике удобно определять направление вектора $\vec{M}$ по правилу правого винта: если вращать головку винта в направлении действия силы, то его поступательное движение покажет направление момента силы $\vec{M}$.

Пусть материальная точка массой m при движении по окружности радиусом r обладает импульсом $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ (рис.5). Моментом импульса материальной точки А относительно некоторой точки О называют векторное произведение радиуса-вектора, проведенного из точки O в данную точку A, и вектора

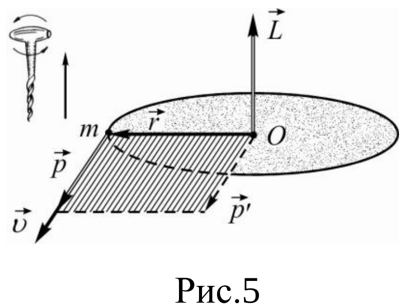


Рис.5

импульса: $\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{\upsilon}\right]$. Направление вектора $\vec{L}$ определяется по правилу векторного произведения или буравчика [3, с. 136-153]. Отметим, что векторным произведением в механике описываются также кориолисова сила инерции $\vec{F}_k = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right]$ и кориолисово ускорение $\vec{a}_k = 2m\left[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}\right]$ [3, с. 364-374]. Кроме рассмотренных выше случаев описания физических явлений в механике при помощи векторного произведения, такой метод применяется и в других разделах физики. В качестве примера рассмотрим случай движения заряженных частиц в электромагнитном поле. На движущую частицу в этом случае действует сила, называемая силой Лоренца, которая описывается формулой: $\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$ [4, с. 253-257].

Здесь e – заряд частицы, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{B}$ – магнитная индукция, $\vec{\upsilon}$ – скорость заряженной частицы относительно системы координат, в которой вычисляются $\vec{F}, \vec{E}, \vec{B}$, а c – скорость света в вакууме.

Формула является важнейшим соотношением электродинамики, т.к. позволяет связать уравнение электромагнитного поля с уравнением движения заряженных частиц.

Первый член в правой части формулы – сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле, второй – в магнитном. Магнитная часть силы Лоренца пропорциональна векторному произведению, т.е. она перпендикулярна скорости частицы (направлению ее движения) и вектору магнитной индукции. Следовательно, она не совершает механической работы и только искривляет траекторию движения частицы, не меняя ее энергии. Модуль этой составляющей силы Лоренца равен $\frac{e}{c}\upsilon B\sin\alpha$. Позже она была названа силой Ампера, а сама формула – законом Ампера. $\vec{F}_A = \frac{e}{c}\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$.

На практике направление силы Ампера часто определяют по правилу левой руки (рис.6): если левую руку расположить так, чтобы нормальная к проводнику составляющая вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ входила в ладонь, четыре вытянутые пальца были направлены по току, то отогнутый на 90° в плоскости ладони большой палец покажет направление силы Ампера, действующей на проводник с током.

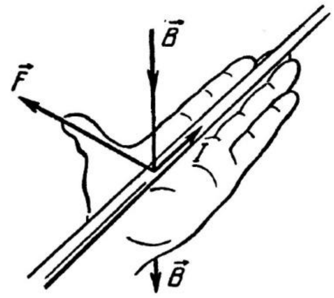


Рис.6

Литература

1. Матэматычная энцыклапедыя. – Мінск, 2001. –495 с.
2. Яковенко, В.А. общая физика. Механика / В.А.Яковенко, Г.А.Забаровский, С.В.Яковенко. – Минск, 2015. – 384с.
3. Хайкин, С.Э. Физические основы механики / С.Э.Хайкин. – М., 1971. – 751 с.
4. Луцевич, А.А. Физика. Учебное пособие / А.А.Луцевич, С.В.Яковенко. – Минск, 2015. – 496 с.