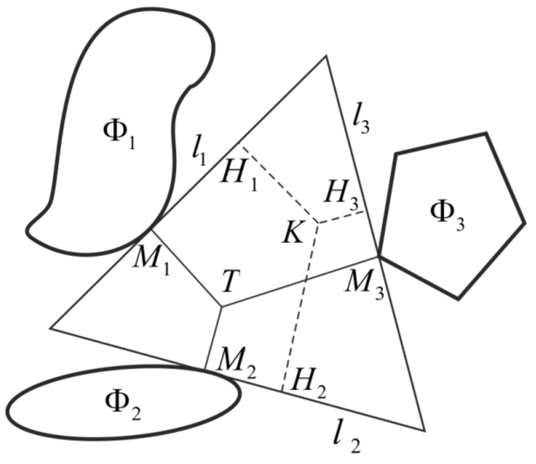
ЗАДАЧА ФЕРМА–ТОРРИЧЕЛЛИ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Задаче Ферма-Торричелли уже более трех с половиной столетий. Постановка задачи чаще всего приписывается Ферма: "На плоскости даны три точки *A, B, C*, не лежащие на одной прямой. Найти точку *T*, чтобы сумма расстояний *AT + BT + CT* была наименьшей". Первое решение принадлежит Торричелли. Он показал, что если все углы треугольника *ABC* меньше 120°, то $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. Позже было показано, что если один из углов треугольника больше либо равен 120°, то точка *T* совпадает с вершиной этого угла. Дальнейшее развитие проблемы Ферма-Торричелли происходило следующими путями: увеличение количества точек для минимизации суммы, наделение каждой точки весом, т.е. замена обычной суммы на взвешенную сумму, построение минимальной сети вместо поиска единственной точки [1].

Предложим еще одно обобщение задачи Ферма-Торричелли. Пусть Φ_1, Φ_2, Φ_3 – некоторые фигуры на плоскости. Найти такую точку *T*, чтобы сумма $T\Phi_1 + T\Phi_2 + T\Phi_3$ расстояний от *T* до Φ_1, Φ_2, Φ_3 была наименьшей.

Под углом $\angle \Phi_1 M \Phi_2$ будем понимать угол между кратчайшими отрезками, соединяющими точку *M* с Φ_1 и Φ_2 соответственно. Назовем некоторую точку *M* точкой Торричелли фигур Φ_1, Φ_2, Φ_3, если $\angle \Phi_1 M \Phi_2 = \angle \Phi_2 M \Phi_3 = \angle \Phi_3 M \Phi_1 = 120^\circ$.

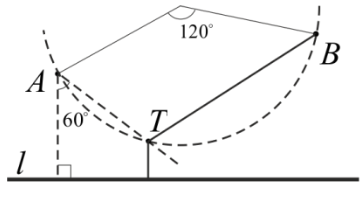


Теорема 1. Пусть *T* – точка Торричелли фигур Φ_1, Φ_2, Φ_3, TM_1, TM_2, TM_3 – кратчайшие отрезки, соединяющие *T* с Φ_1, Φ_2, Φ_3, прямые l_1, l_2, l_3 проходят через M_1, M_2, M_3 перпендикулярно TM_1, TM_2, TM_3. Если Φ_1, Φ_2, Φ_3 лежат в тех полуплоскостях относительно l_1, l_2, l_3, которые не содержат *T*, то точка *T* является решением задачи Ферма-Торричелли для Φ_1, Φ_2, Φ_3.

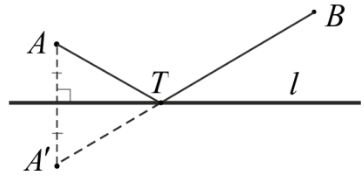
Доказательство. Треугольник, образованный прямыми l_1, l_2, l_3, правильный, поэтому для любой точки *K* $TM_1 + TM_2 + TM_3 \le KH_1 + KH_2 + KH_3 \le K\Phi_1 + K\Phi_2 + K\Phi_3$ что и требовалось доказать.

Теорема не указывает способа нахождения точки минимума, для произвольных фигур такого способа не существует. Рассмотрим частные случаи, когда в классической задаче одна, две или три точки заменяются прямыми.

1. Две точки и прямая. Если точка Торричелли существует, то по теореме 1 она является решением задачи. Если такой точки нет, то точка *T* принадлежит прямой. Идея построения точки *T* с помощью циркуля и линейки показана на рисунках.



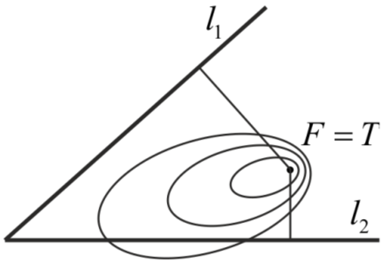
2. В случае трех прямых точка *T* находится в вершине треугольника, образованного этими прямыми, с



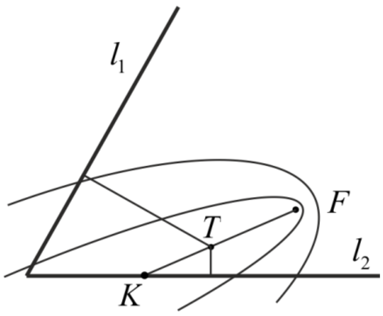
наибольшим углом. Это несложно показать, воспользовавшись тем фактом, что для любой точки отрезка, перпендикулярного биссектрисе угла, сумма расстояний до сторон угла постоянна.

3. Точка и две прямые. Для исследования этого случая воспользуемся следующей теоремой, которую в силу сложности приведем без доказательства.

Теорема 2. Пусть угол α образован прямыми l_1 и l_2, точка F лежит внутри угла. ГМТ, лежащих внутри угла и удовлетворяющих условию $Ml_1 + Ml_2 + MF = s$, есть коническое сечение γ с фокусом F, осью, параллельной биссектрисе угла, и эксцентриситетом $\varepsilon = 2\sin \alpha/2$, причем параметр s влияет только на размер кривой.

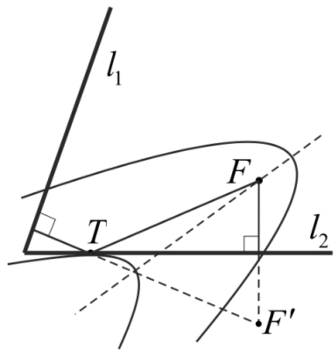


3.1. $\alpha < 60^\circ$, тогда $2\sin \alpha/2 < 1$, поэтому γ – эллипс. При уменьшении s эллипс сжимается к своему фокусу, и при некотором значении s_0 вырождается в него. Поэтому в этом случае искомая точка T совпадает с F.



3.2. $\alpha = 60^\circ$, $2\sin \alpha/2 = 1$, γ – парабола. При уменьшении s парабола сжимается к своей оси, и при некотором значении s_0 вырождается в нее. Поэтому решением задачи будет любая точка отрезка FK, параллельного биссектрисе угла.

3.3. $\alpha > 60^\circ$, $2\sin \alpha/2 > 1$, γ – гипербола (точнее, одна ее ветвь). Пусть $Fl_1 > Fl_2$. При уменьшении s гипербола скользит вдоль прямой, параллельной биссектрисе угла, и последней точкой гиперболы, лежащей в угле, будет точка ее касания с l_2 или вершина угла. Для нахождения точки T в этом случае необходимо отобразить F симметрично относительно l_2 и провести перпендикуляр к l_1. Если его пересечение с l_2 лежит на стороне угла, то T находится именно в этой точке, в противном случае точка T находится в вершине угла.



Литература

1. Martini, H. Fermat–Torricelli problem / H. Martini // Encyclopedia of Mathematics. Supplement III. – Kluwer Academic Publishers, 2001. – с.149–151.