УДК 517.9

Ф. В. ЧУМАКОВ[1], С. И. ВАСИЛЕЦ[2]

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ВИДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И СМЕШАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: fchumakov@tut.by
[2]Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, Минск, Беларусь, e-mail: svasilets@tut.by

Решение в явном виде интегрального уравнения первого рода с логарифмами в ядре сводится к последовательному решению характеристического особого уравнения и уравнения Вольтерры. Решение дается в явном виде в зависимости от индекса особого уравнения и разрешимости уравнения Вольтерры.

Ключевые слова: особое интегральное уравнение, индекс, уравнение Вольтерры, условия разрешимости, условия равносильности, явное решение уравнения.

F. V. CHYMAKOV[1], S. I. VASILETS[2]

SOLUTION OF THE FIRST-KIND ONE-TYPE INTEGRAL EQUATION WITH THE LOGARITHMIC KERNEL AND MIXED COEFICIENTS

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: fchumakov@tut.by
[2]Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, e-mail: svasilets@tut.by

An explicit solution of first-kind one-type integral equation with logarithms in the kernel reduces to a successive solution of the characteristic singular equation and the Volterra equation. The solution is given in closed form, depending on the index of the singular equation and the solvability of the Volterra equation.

Keywords: singular integral equation, index, Volterra equation, solvability conditions, equivalence conditions, quadrature of equation.

Дадим решение в квадратурах интегрального уравнения, которое обобщает известные уравнения [1, § 55], содержащие в ядре логарифм разности переменных,

$$c(x)\left(\int_{\alpha}^{x} a(t)\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{\beta} b(t)\varphi(t)\,dt\right)+$$

$$+d(x)\left(\int_{\alpha}^{\beta} a(t)\left(\ln\frac{\beta-x}{|t-x|}\right)\varphi(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\beta} b(t)\left(\ln\frac{|t-x|}{x-\alpha}\right)\varphi(t)\,dt\right)=f(x). \tag{1}$$

Решение приведенного уравнения будем искать в классе функций, обеспечивающих существование интегралов в формуле (1) как несобственных, а именно в классе функций, допускающих представление в виде

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{*}(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon}(\beta-x)^{1-\varepsilon}}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$, а функция $\varphi^{*}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Покажем, что данное уравнение сводится к характеристическому особому уравнению с последующим решением уравнения Вольтерры. Введем аналитическую функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{\alpha}^{\tau}a(t)\varphi(t)\,dt+\int_{\tau}^{\beta}b(t)\varphi(t)\,dt\right]\frac{d\tau}{\tau-z}. \qquad (3)$$

По формулам Сохоцкого [1, § 4] находим:

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=\int_{\alpha}^{x}a(t)\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{\beta}b(t)\varphi(t)\,dt=h(x), \qquad (4)$$

$$\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{\alpha}^{\tau}a(t)\varphi(t)\,dt+\int_{\tau}^{\beta}b(t)\varphi(t)\,dt\right]\frac{d\tau}{\tau-x}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\left(\int_{\alpha}^{\beta}a(t)\ln\left(\frac{\beta-x}{|t-x|}\right)\varphi(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\beta}b(t)\left(\ln\frac{|t-x|}{x-\alpha}\right)\varphi(t)\,dt\right)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{h(\tau)\,d\tau}{\tau-x}. \qquad (5)$$

В равенстве (5) мы изменили порядок интегрирования и учли интегралы

$$\int_{\alpha}^{t}\frac{d\tau}{\tau-x}=\ln\frac{|t-x|}{x-\alpha}, \qquad \int_{t}^{\beta}\frac{d\tau}{\tau-x}=\ln\frac{\beta-x}{|t-x|}.$$

Применяя формулы Сохоцкого (4), (5), записываем уравнение (1) в виде характеристического особого уравнения

$$c(x)h(x)+d(x)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{h(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=f(x). \qquad (6)$$

Решая уравнение (6), затем уравнение Вольтерры (4), найдем решение исходного уравнения (1). Сначала решаем уравнение

$$\int_{\alpha}^{x}a(t)\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{\beta}b(t)\varphi(t)\,dt=h(x), \qquad (7)$$

где $h(x)$ – произвольно заданная функция, условия на которую будут указаны ниже. Решение ищем в классе функций вида (2), обеспечивающих существование интегралов в (7) как несобственных. Будем предполагать, что функции $a(x)$, $b(x)$, стоящие под знаком интегралов в уравнении (1) (внутренние коэффициенты уравнения), и функция $h(x)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$ и выполняется условие $a(x)-b(x)\neq 0$. Далее дифференцируем равенство (7) и получаем соотношение $a(x)\varphi(x)-b(x)\varphi(x)=\left(a(x)-b(x)\right)\varphi(x)=h'(x)$, из которого находим функцию

$$\varphi(x)=\frac{h'(x)}{a(x)-b(x)}. \qquad (8)$$

Подставляя функцию $\varphi(x)$ из (8) в равенство (7) и вычисляя интегралы по частям, получим необходимое и достаточное условие того, что функция (8) будет решением уравнения (7):

$$\int_{\alpha}^{x}a(t)\frac{h'(t)}{a(t)-b(t)}dt+\int_{x}^{\beta}b(t)\frac{h'(t)}{a(t)-b(t)}dt\Leftrightarrow\frac{a(x)}{a(x)-b(x)}h(x)-\frac{b(x)}{a(x)-b(x)}h(x)+$$

$$+\frac{a(\alpha)}{a(\alpha)-b(\alpha)}h(\alpha)+\frac{b(\beta)}{a(\beta)-b(\beta)}h(\beta)-\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)}\right)'h(t)\,dt-\int_{x}^{\beta}\left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)}\right)'h(t)\,dt=$$

$$=h(x)-\frac{a(\alpha)h(\alpha)}{a(\alpha)-b(\alpha)}+\frac{b(\beta)h(\beta)}{a(\beta)-b(\beta)}-\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)}\right)'h(t)\,dt-\int_{x}^{\beta}\left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)}\right)'h(t)\,dt=h(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{x}\left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)}\right)' h(t)dt+\int_{x}^{\beta}\left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)}\right)' h(t)dt=$$

$$=\frac{b(\beta)}{a(\beta)-b(\beta)}h(\beta)-\frac{a(\alpha)}{a(\alpha)-b(\alpha)}h(\alpha). \qquad (9)$$

Заметим, что функция $h(x)$ имеет конечные пределы в точках $x = \alpha$, $x = \beta$. В этом легко убедиться, подставляя в уравнение (7) последовательно $x = \alpha$, $x = \beta$. Если же пределы функции $h(x)$ в точках $x = \alpha$, $x = \beta$ будут нулями порядка, меньшего единицы, то функция $h'(x)$ на концах отрезка интегрирования будет обращаться в бесконечность порядка, меньшего единицы, и, следовательно, найденное по формуле (8) решение будет принадлежать классу функций (2). В нашем случае $h(x)$ есть решение характеристического особого уравнения (6). Значит, надо искать ограниченные и дифференцируемые на $[\alpha,\beta]$ решения $h(x)$ уравнения (6), которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\alpha} h(x)=h(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to-\beta} h(x)=h(\beta)$. Отсюда следует, что для решения уравнения (6) точки $x = \alpha$, $x = \beta$ не должны быть точками автоматической ограниченности [1, § 41]. Будем предполагать, что функции $c(x)$, $d(x)$ (внешние коэффициенты уравнения (1)) и функция $f(x)$ имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $c^2(x) - \pi^2 d^2(x) \neq 0$. При сделанных предположениях найденное решение $h(x)$ уравнения (6) обеспечит получение по формуле (8) функций, принадлежащих классу функций (2).

Выпишем решение уравнения (6) в классе функций, ограниченных на обоих концах отрезка [2, § 30]. Здесь $G(x)=\dfrac{c(x)-\pi d(x)i}{c(x)+\pi d(x)i}=e^{i\theta(x)}$, где $\theta(x) = \arg G(x)$, так как $|G(x)|=1$. Выбираем значения аргумента такими, чтобы выполнялось условие $0 \le \theta(x) < 2\pi$. Индекс x уравнения (6) в классе ограниченных функций вычисляется по формуле $\chi=\left[\dfrac{\theta(\beta)}{2\pi}\right]-1$. Если $\chi \ge 0$, то решение уравнения (6) находится по формуле

$$h(x)=Rf+\pi d(x)Z_0(x)(x-\alpha)^{\mu_\alpha}(\beta-x)^{\mu_\beta}P_{\chi-1}(x)=Rf+\sum_{k=1}^{\chi}c_k h_k(x), \qquad (10)$$

где

$$h_k(x)=\pi d(x)Z_0(x)(x-\alpha)^{\mu_\alpha}(\beta-x)^{\mu_\beta}x^{k-1},$$

$$Rf=c(x)f(x)-d(x)Z_0(x)\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{x-\alpha}{t-\alpha}\right)^{\mu_\alpha}\left(\frac{\beta-x}{\beta-x}\right)^{\mu_\beta}\frac{f(t)}{Z_0(x)(t-x)}dt,$$

$$Z_0(x)=\exp\left[\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\theta(t)}{t-x}dt+\theta(\alpha)\ln(x-\alpha)-\theta(\beta)\ln(\beta-x)\right]dt,$$

$$\mu_\alpha=1-\frac{\theta(\alpha)}{2\pi},\quad \mu_\beta=\frac{\theta(\beta)}{2\pi}-\left[\frac{\theta(\beta)}{2\pi}\right].$$

Многочлен $P_{\chi-1}(x) \equiv 0$ в формуле (10) при $\chi = 0$. Для того чтобы уравнение (6) имело решения при $\chi < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(t-\alpha)^k f(t)}{(t-\alpha)^{\mu_\alpha}(\beta-x)^{\mu_\beta}Z_0(t)(t-x)}dt=0,\quad k=0,1,2,\ldots,|\chi|. \qquad (11)$$

Решение при выполнении условий (11) единственное и дается формулой (10) при $P_{\chi-1}(x) \equiv 0$. Однако не всякая функция, вычисленная по формуле $\varphi(x) = \dfrac{h'(x)}{a(x)-b(x)}$, будет решением исходного уравнения (1). Решением будут только те функции, которые удовлетворяют необходимому и достаточному условию (9) разрешимости уравнения (1), которое имеет вид

$$\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)}\right)' Rf(t)\,dt + \int_{x}^{\beta}\left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)}\right)' Rf(t)\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\chi}\left[\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)}\right)' h_k(t)\,dt + \int_{x}^{\beta}\left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)}\right)' h_k(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{b(\beta)}{a(\beta)-b(\beta)} h(\beta) - \frac{a(\alpha)}{a(\alpha)-b(\alpha)} h(\alpha). \qquad (12)$$

Список использованной литературы

1. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977.
2. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987.

Поступила в редакцию 15.04.2016