АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

на правах рукописи

ЧЕРНЯК Аркадий Александрович

УДК 519.1

СТЕПЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ГРАФОВ И НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Специальность 01.01.09 - математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МИНСК- 1986

Работа выполнена в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И.Ленина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ТЫШКЕВИЧ Р.И.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В.А.ЕМЕЛИЧЕВ

кандидат физико-математических наук В.И.САРВАНОВ

Ведущая организация: Вычислительный центр АН СССР, /Москва/

Защита состоится "___"________________1986г. в 15.00 часов на заседании специализированного Совета К 006.19.01 в Институте математики АН БССР, 220604, г.Минск, ул.Сурганова,11.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики АН БССР.

Автореферат разослан "___"________________1986г.

Ученый секретарь специализированного Совета
кандидат физико-математических наук Н.Н.Метельский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уже со времен своего зарождения теория графов органически связана с алгоритмическими методами. В последние два десятилетия алгоритмическая сторона теории графов получила новые мощные стимулы для своего развития. С одной стороны, это связано с проникновением графовых моделей в новые области приложений: в теоретическую физику, социологию, лингвистику, статистику, теорию информационных сетей (помимо таких традиционных областей, как электрические цепи и химия). С другой стороны, огромные возможности для реализации алгоритмов предоставляет новый этап развития вычислительной техники.

Среди алгоритмических проблем теории графов особое место занимают задачи, связанные со степенными параметрами графов, имеющих предписанные свойства. Как правило, решение этих задач приводит к рассмотрению таких сложных ситуаций, когда число изучаемых объектов экспоненциально велико, и поэтому в обозримом будущем прямые методы, близкие к переборным, здесь неприменимы даже при относительно небольшой длине входных данных. Другой особенностью этих задач является взаимосвязь их с такими разделами дискретной математики, как комбинаторная теория целочисленных матриц, теория перечисления, пороговая логика, а также большие возможности их применения в структурном анализе сложных систем и в химии. Отметим, что большой вклад в разработку методов решения обсуждаемых задач внесли известные специалисты по теории графов и комбинаторному анализу: Буш Ф.Т., Голумбик М., Клейтман Д., Рао С.Б., Тышкевич Р.И., Френк Х., Хакими Л., Хватал В., Хаммер П., Чен В.К., Эдмондс Дж.

В свете сказанного, тема диссертации представляется весьма актуальной.

Цель работы. Во-первых, развить общий декомпозиционный подход, сводящий многие важные задачи теории графов к неразложимому случаю, и решить на его основе две известные классификационные задачи, касающиеся реализаций степенных последовательностей; во-вторых, решить некоторые открытые задачи о реализациях степенных множеств с предписанными свойствами, выбор которых обусловлен определенным значением их для теории и приложений.

Научная новизна. I. Разработан общий метод декомпозиции графов на уровне (α, β). Именно: введены классы полярных графов (α, β) и понятие разложимости на уровне (α, β); доказана теорема о каноническом разложении графа, сводящая многие задачи на графах к неразложимому случаю; построены полиномиальные алгоритмы канонического разложения; выявлены все NP-полные подзадачи задачи распознавания полярности (частично изученной ранее другими авторами); дано полное описание переключательно полных классов (α, β) полярных графов.

2. На основе декомпозиционного метода предложен общий подход к описанию вынужденно Р-графических последовательностей (где Р - наследственное свойство относительно композиции). С его помощью получена эффективная характеризация таких последовательностей для свойств Р, выделяющих основные подклассы класса совершенных графов.

3. На основе декомпозиции получены классификация и перечисление доминантно-пороговых и бокс-пороговых графов, а также линейные алгоритмы распознавания этих графов и их степенных последовательностей.

4. Конструктивно описаны степенные наборы, реализуемые графами с наибольшей связностью, определены все степенные на-

боры с единственной реализацией.

5. Усилены результаты (доказанные ранее другими авторами) о порядках обобщенных $(S; m)$-клеток.

6. Доказан новый критерий планарности графов, сформулированный в виде гипотезы Литтлом; в качестве прямого следствия получено описание кубических планарных графов в терминах запрещенной структуры циклов.

Методы исследования. Использовались идеи и методы теории графов, теории сложности вычислений, теории перечисления и теории надежности коммуникационных сетей.

Практическая ценность. I. Декомпозиционный метод позволяет сводить многие трудные классификационные задачи теории графов к неразложимому случаю, что, в свою очередь, зачастую приближает к решению этих задач. Это подтверждается как результатами диссертации, так и новыми результатами автора, еще не опубликованными и не вошедшими в диссертацию (например, реконструируемость разложимых графов, классификация наследственных квазидоминантно-пороговых графов).

2. Классификационные задачи, решенные в диссертации, касаются классов графов, играющих важную роль в приложениях.

3. Результаты диссертации о реализациях степенных наборов могут применяться в структурном синтезе надежных систем. Один из этих результатов был использован при выполнении хоздоговорной темы в Институте проблем надежности и долговечности машин АН БССР.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзной конференции "Повышение надежности машин и приборов" (Куйбышев, I98I), на Одесском семинаре "Графы, гиперграфы и алгебраические системы" (I978, I979, I98I), на конференции "Методы оптимизации на сетях и графах" (Батуми, 1982), на II Всесоюзном совещании "Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях" (Новосибирск, 1984), на Самаркандском семинаре по комбинаторной математике (1984), на научно-исследовательском семинаре по теории графов в Белорусском госуниверситете (Минск, 1982-1985), на 30-м Международном коллоквиуме по технической и биомедицинской кибернетике, математике, вычислительной технике и экономической кибернетике (ГДР, 1985).

<u>Публикации.</u> Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-9].

<u>Структура и объем работы.</u> Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы (107 наименований) и приложения. Основное содержание диссертации изложено на 147 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор имеющихся результатов по теме диссертации, обосновывается ее актуальность, формулируется цель работы, излагается ее краткое содержание.

Все рассматриваемые в работе графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер.

В главе I строится теория декомпозиции графов на уровне (α, β) , где α и β – произвольные натуральные числа. Фолдес и Хаммер в [1] ввели понятие расщепляемого графа. Эти графы изучались далее многими авторами. В §1 главы I класс расщепляемых графов значительно расширяется. Для

---

[1] Foldes S., Hammer P.L. Split graphs. - University of Waterloo, 1976, CORR 76-3.

произвольных натуральных чисел α и β вводится класс полярных графов (α, β). Истинна импликация

$$(\alpha_1 \le \alpha_2,\ \beta_1 \le \beta_2) \Rightarrow (\alpha_1, \beta_1) \subseteq (\alpha_2, \beta_2).$$

Последнее включение строгое, если хотя бы одно из неравенств строгое. Таким образом, возникает иерархия полярных графов, в которой графы, рассматривавшиеся ранее, составляют первое звено (1,1). С помощью полярных графов определяются операция $\circ$ – композиция графов, разложимость на уровне (α, β) и в классе (α, β) , вводится некоторое отношение эквивалентности на множестве неразложимых графов и доказывается следующая

Теорема декомпозиции. Любой граф (G, A, B) из класса (α, β) представляется в виде композиции

$$(G, A, B) = (X_1, A_1, B_1) \circ \ldots \circ (X_m, A_m, B_m) \qquad (1)$$

неразложимых в этом классе компонент. Любой граф G , не принадлежащий классу (α, β) и разложимый на уровне (α, β), представляется в виде композиции

$$G = (X_1, A_1, B_1) \circ \ldots \circ (X_m, A_m, B_m) \circ H, \qquad (2)$$

где (X_i, A_i, B_i) неразложимый в классе (α, β), H неразложимый на уровне (α, β) . Эти представления единственны с точностью до перестановок стоящих рядом эквивалентных компонент.

Представления (1) и (2) называются каноническими разложениями.

Для уровня (1,1) эта теорема была доказана в [1].

---

[1] Тышкевич Р.И. Каноническое разложение графа. - ДАН БССР, 1980, т.24, с.677-679.

Граф, неразложимый на уровне (α,β), может оказаться разложимым на более высоком уровне (γ,δ) ($\alpha \le \gamma$, $\beta \le \delta$ и какое-либо из этих неравенств строгое). Поэтому, увеличивая значения параметров уровня, можно получить более детальную декомпозицию.

Теорема декомпозиции позволяет сводить решение многих важных задач на графах к неразложимому случаю. Для этого нужно только, чтобы рассматриваемые свойства графов были наследственными относительно композиции $\circ$ или подвергались легко обозримым изменениям. С ее помощью можно, в частности, решать классификационные задачи в тех сложных ситуациях, когда число изучаемых объектов экспоненциально велико. В главе 2 на основе декомпозиции решены две известные классификационные задачи теории графов, связанные со степенными параметрами. Подробнее о них будет сказано несколько ниже.

Эффективное применение теоремы декомпозиции невозможно без рассмотрения алгоритмического аспекта следующих двух задач:

I. построения канонического разложения графа,

2. распознавания полярности и построения соответствующего полярного разбиения.

Первая задача естественно расслаивается на следующие подзадачи.

I.I. Каноническое разложение на фиксированном уровне (α,β).

I.2. Каноническое разложение на уровне $(\alpha,\infty)=\bigcup_{\beta=1}^{\infty}(\alpha,\beta)$ $((\infty,\beta))$. Здесь α (β) фиксируется, а от компонент разложения требуется неразложимость на каждом уровне (α,β), $\beta=1,2,\dots$ $(\alpha=1,2,\dots)$.

I.3. Каноническое разложение на уровне

$$(\infty,\infty)=\bigcup_{\alpha,\beta=1}^{\infty}(\alpha,\beta),$$

где требуется, чтобы компоненты были абсолютно неразложимы, т.е. неразложимы на любом уровне.

Вторая задача имеет аналогичные варианты.

В §2 главы I решены все три подзадачи задачи I с временной сложностью $O(n^4)$, где n – порядок графа. Что касается второй задачи, то она решалась в несколько этапов разными авторами. В [1-2] были получены условия принадлежности графа классу (I,I), которые формулируются в терминах степеней его вершин и проверяются за линейное относительно n время; там же показано, что за это же время строится полярное разбиение. Для решения задачи на более высоких уровнях (α,β) списков степеней вершин уже недостаточно. Для фиксированных α, β, где $\alpha<\infty$, $\beta<\infty$, задача 2 решена в [3] за полиномиальное время $O(n^{2\alpha+2\beta+3})$. В §3 главы 2 задача решена для классов $(1,\beta)$, $(\beta,1)$, где $1\le\beta\le\infty$, причем время тестирования не зависит от β и равно $O(n^3)$. В этом же параграфе доказывается, что в остальных случаях (т.е. при $\beta=\infty$, $2\le\alpha\le\infty$, или наоборот) задача распознавания полярности является NP-полной, а соответствующая ей переборная задача построения полярного

1) Hammer P.L., Simeone B. The splitance of a graph.- Combinatorica, 1981, vol.1, p.275-284.

2) Тышкевич Р.И., Мельников О.И., Котов В.М. О графах и степенных последовательностях: каноническое разложение.- Кибернетика, I98I, №6 с.5-8.

3) Мельников О.И., Кожич П.П. Алгоритмы распознавания полярности графа с ограниченными параметрами.- Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, I985, №6, с.50-54.

разбиения - $\mathcal{NP}$ -эквивалентной. Тем самым исчерпаны все возможные подслучаи задачи 2.

В [1)-2)] введены переключательно полные свойства: свойство Р называется переключательно полным (или s -полным), если для любых двух графов G и H с одинаковыми списками степеней вершин, удовлетворяющих свойству Р, существует конечная цепочка переключений, переводящая G в H и сохраняющая (после каждого переключения) свойство Р (переключение графа G - это допускаемое G преобразование, заменяющее пару независимых ребер ac , bd парой ребер ad , bc) . Проблема определения s -полных свойств была сформулирована Колборном (см. [1)]) . Как было отмечено в [2)] , для таких свойств Р имеется эффективный метод генерации графов, удовлетворяющих свойству Р. Известно лишь несколько свойств, для которых нетривиально устанавливается или опровергается их s -полнота. В §4 главы I решена задача определения s -полноты полярности графов, а именно, доказана следующая

Теорема 3.4. Свойство "принадлежать классу (α, β) ", где $1 \leq \alpha \leq \infty$, $1 \leq \beta \leq \infty$, является s -полным, если и только если $\alpha + \beta \leq 3$.

Отметим, что при $\alpha = \beta = 1$ s -полнота полярности тривиальна, как впрочем и s -полнота всех других свойств, определяемых списками степеней вершин графа (например, пороговость, разложимость).

---

1) Capobianco M., Maurer S., McCarthy D., Molluzo J. A collection of open problems. – Annals N.Y. Acad. Sci., 1979, vol. 319, p. 565-590.

2) Colborn C.J. Graph generation. - Research Report CS-77-37, University of Waterloo, 1970.

В главе 2 на основе декомпозиционного подхода решены две открытые классификационные задачи.

Последовательность

$$\pi = (d_1, \dots, d_n)$$

целых чисел называется графической, если существует n -вершинный граф - реализация π , для которого $d_1, \dots, d_n$ - степени вершин. Обозначим $G(\pi)$ множество реализаций последовательности π , $G(P)$ - множество графов, обладающих некоторым абстрактным теоретико-графовым свойством Р. Свойство Р называется вынужденным, если истинна импликация:

$$(G(P) \cap G(\pi) \neq \emptyset) \Rightarrow (G(\pi) \subseteq G(P)).$$

Иногда список степеней вершин графа определяет его до изоморфизма, т.е. $|G(\pi)| = 1$ (в этом случае π называется униграфической, а ее реализация - униграфом). Известно, что униграфами являются все пороговые, матроидальные, матрогенные графы, так что соответствующие свойства являются тривиально вынужденными. Среди других известных вынужденных свойств отметим расщепляемость, разложимость на уровне (I,I).

Список вынужденных свойств можно увеличить за счет ограничений, наложенных на графические последовательности. Априори каждое свойство Р можно объявить вынужденным, если в качестве π брать только последовательности, для которых

$$G(\pi) \subseteq G(P). \qquad (3)$$

Графическая последовательность π называется вынужденно Р-графической, если верно (3). К настоящему времени описано не много вынужденно Р-графических последовательностей [1)] .

---

1) Rao S.B. A survey of the theory of potentially P-graphic and forcibly P-graphic degree sequences. - Lect. Notes Math., 1981, vol. 885, p. 417-440.

С.Б.Рао предложил в [1] общий подход к описанию таких последовательностей для свойств Р, сохраняющихся при переходе к индуцированным подграфам. Фактическое тестирование последовательностей по методу Рао требует знания множества индуцированных подграфов, запрещаемых свойством Р, и громоздко, даже если последнее множество известно.

Можно продвинуть изучение вынужденно Р-графических последовательностей, наложив на Р дополнительные условия. В §I главы 2 разработан метод характеризации вынужденно Р-графических последовательностей на основе декомпозиции на уровне (I,I) для свойств Р, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

А. если $G \in G(P)$, а H – индуцированный подграф в G, то $H \in G(P)$;

Б. если $F, G \in G(P)$ и $(F,A,B) \in (1,1)$, то и $(F,A,B) \circ G \in G(P)$.

(Эти свойства здесь названы наследственными, в отличие от [1], где требуется только условие А.). В частности, приводятся характеризации вынужденно Р-графических последовательностей в тех случаях, когда Р есть одно из следующих свойств:

I. быть хордальным графом; 2. быть сильно хордальным графом; 3. быть интервальным графом; 4. быть тривиально совершенным графом; 5. быть транзитивно ориентируемым графом; 6. быть графом подстановок.

Этими свойствами выделяются основные известные подклассы класса совершенных графов [2]. Временная сложность тестирования

[1] Rao S.B. Towards a theory of forcibly hereditary P-graphic sequences. - Lect. Notes Math., 1981, vol. 885, p.441-458.

[2] Golumbic M. Algorithmic graph theory and perfect graphs. - Ac. Press, 1980.

равна соответственно

$O(n), O(k\ell^5) (\leq O(n^5)), O(k\ell^5), O(n), O(k\ell^5), O(k\ell^5)$,

где n – длина тестируемой последовательности, k – число компонент в каноническом разложении ее реализации, ℓ – максимум длин этих компонент. При тестировании по методу Рао в этих случаях требуется (если не привлекать дополнительных соображений), соответственно,

$Q(n^9), Q(n^{11}), Q(n^{10}), Q(n^7), Q(n^{11}), Q(n^{11})$

элементарных операций (мы пишем $f(n) = Q(g(n))$, если существует такая константа C, что $f(n) \geq Cg(n)$ для любого n).

Следует отметить, что, в случае наследственных свойств Р, ускорение тестирования еще не исчерпывает преимуществ нашего подхода по сравнению с методом Рао. Так, полученные в §I главы 2 теоремы характеризации позволяют выявить ряд структурных свойств реализаций вынужденно Р-графических последовательностей, где Р – одно из свойств I-6, а в некоторых случаях позволяют даже обозреть все их реализации (например, теоремы 2.I, 2.4-2.5).

В §2 главы 2 решена задача классификации доминантно-пороговых графов, демонстрирующая плодотворность декомпозиционного подхода на более высоком, чем (I,I), уровне.

Доминантно-пороговые графы (сокращенно, ДП-графы) были введены Бензакеном и Хаммером в [1], и тесно связаны с пороговыми графами. Вначале несколько слов о последних. Пороговые графы изучались многими авторами и детально описаны. В частности, известно: всякий пороговый граф является полярным униграфом, графическая последовательность длины n с пороговой

[1] Benzaken C., Hammer P.L. Linear separation of dominating sets in graphs. - Annals Discrete Math., 1978, vol.3, p.1-10.

реализацией распознается за время $O(n)$, число n-вершинных пороговых графов равно 2^{n-1}. Используя теорему декомпозиции, легко повторить эти результаты, а также перечислить пороговые графы в соответствии с числом ребер (следствия 2.17, 2.19-2.20).

О ДП-графах было известно гораздо меньше. Так, Бензакен и Хаммер охарактеризовали ДП-графы в терминах запрещенных индуцированных подграфов и указали алгоритм их распознавания с временной сложностью $O(m \cdot n)$, где m и n - число ребер и вершин соответственно.

В §2 главы 2 на основе декомпозиции на уровне (2,1) получены следующие результаты. Показано, что ДП-графы в определенном смысле близки к униграфам, хотя в отличие от пороговых не обязательно ими являются. Именно, ДП-граф без изолированных вершин определяется до изоморфизма списком степеней своих ребер. Получены характеризации последовательностей, которые могут быть реализованы как списки степеней вершин ДП-графов, и вынужденно доминантно-пороговых последовательностей. Приведенные условия проверяются за время $O(n)$ (n - длина последовательности). Проведена классификация ДП-графов, что позволило перечислить их в соответствии с числом вершин (ребер). С помощью перечисляющего ряда получены оценки числа d_n доминантно-пороговых n-вершинных графов (без изолированных вершин):

$$(2.2)^{n-2} \le d_n \le (2.3)^{n-2}.$$

Из результатов этого параграфа и §2 главы 1 вытекает алгоритм распознавания ДП-графов с временной сложностью $O(\max(m,n))$ (следствие 2.14).

Следует отметить, что изучение ДП-графов было независимо

продолжено в [1]. Там приведена клеточная структура таких графов и на ее основе получен алгоритм распознавания с временной сложностью $O(\max(m, n \cdot \log n))$.

Кроме ДП-графов, в §2 на основе декомпозиции классифицированы и перечислены бокс-пороговые графы (сокращенно, ВТ-графы), обобщающие пороговые графы. Из полученной классификации вытекают линейные алгоритмы распознавания ВТ-графов и их степенных последовательностей (следствия 2.23-2.26). ВТ-графы были введены ранее Ролинсоном и Энтрингером в связи с некоторыми проблемами теории коммуникационных сетей [2], а их списки степеней вершин изучались в [3].

Следует отметить, что введение и последующее интенсивное изучение всех классов графов, о которых идет речь в §2, в значительной степени стимулировалось их значением для приложений. Так, например, пороговые графы возникают (и применяются) в параллельном программировании и при изучении явления хиральности молекул в стереохимии, ДП-графы - в графовых моделях некоторых технических систем и в задачах агрегации целочисленных неравенств, ВТ-графы - в коммуникационных сетях.

Глава 3 посвящена решению некоторых открытых задач о графах с заданными степенными множествами и свойствами.

Проблемы, возникающие при исследовании структурных свойств классов графов с заданными ограничениями на их сте-

---

[1] Marchioro P., Morgana A. Structure and recognation of domishold graphs. - Discrete Math., 1984, vol. 50, p. 239-251.

[2] Rawlinson K.T., Entringer R.C. Class of graphs with restricted neighborhoods. - J. Graph Theory, 1979, vol. 3, p. 257-262.

[3] Peled U., Simeone B. Box-threshold graphs. - J. Graph Theory, 1984, vol. 8, p. 331-345.

пенные множества, можно условно разделить на две группы. Первая их них связана с такими традиционно трудными вопросами, как трассируемость, гамильтоновость, планарность реализаций. Особенностью задач этой группы является их важность для теоретических исследований в комбинаторике и теории графов. Примером этого может служить проблема характеризации планарных кубических графов в терминах запрещенной структуры циклов, обсуждаемая в конце введения. Вторая группа проблем непосредственно связана с приложениями и касается вопросов реализуемости множеств целых чисел S графами из заданного класса, определяемого некоторым свойством Р (множество $S=\{k_1,...,k_n\}$, где $0<k_1<...<k_n$, называется реализуемым, если существует граф со степенным множеством S). Эти проблемы порождают большое количество экстремальных задач теории графов, алгоритмическое решение которых связано, например, с вопросами обеспечения живучести коммуникационных сетей. В качестве предписанных свойств Р здесь изучаются, в основном, связность, обхват, диаметр графов, являющиеся основными топологическими критериями надежности [1]. Интерес к этим задачам не исчерпывается их прикладным значением. Так, изучение $(S;m)$-клеток (т.е. реализаций множества S с заданным обхватом m и минимальным порядком) обнаружило новые приложения алгебры к теории графов, а теории графов - к проективной геометрии [2].

---

[1] *Soi I.M., Aggarwal K.K. Reliability indices for topological design of computer communication networks.- IEEE Trans. Reliab., 1981, vol. 30, p. 438-443.*

[2] *Wong P.K. Cages-a survey.- J. Graph Theory, 1982, vol.6, p.1-22.*

В §I главы 3 решена задача реализуемости множества S m-связным графом с p вершинами для любых заданных целых чисел m, p. Решение конструктивно, и алгоритм построения p-вершинной реализации с наибольшей связностью требует $O(p^2)$ элементарных операций. Решение этой задачи в частных случаях можно извлечь из работ других авторов. В качестве прямого следствия получены условия реализуемости множества S m-реберно-связным p-вершинным графом.

В [1] выявлены все случаи реализуемости множества S графом с заданным порядком p. Естественно возникает вопрос, когда графы однозначно определяются набором параметров S и p. Такие наборы названы униграфическими и полностью описываются в §2 главы 3.

Еще в 1947 году Таттом были изучены некоторые $(k_1;m)$-клетки. Однако, эти графы стали интенсивно изучаться только после появления работ Эрдеша и Закса (в которой доказано существование клеток) и Хоффмана и Синглетона (где показано, что некоторые графы Мура не существуют). Центральной задачей в изучении $(S;m)$-клеток является вычисление функции $f(S;m)$ - порядка $(S;m)$-клетки. Однако, как отмечено в обзоре [2], проблема вычисления f очень трудна уже при $n=1$, $k_1\geq 3$, $m\geq 5$. Достаточно сказать, что почти ничего неизвестно о значениях $f(k_1;m)$ при $m\geq 13$ или при $7\leq m\leq 12$, $k_1\geq 4$, $k_1-1\neq p^t$ (p - простое); в остальных случаях найдено лишь несколько точных значений $f(k_1;m)$.

---

[1] *Sipka T. The orders of graphs with prescribed degree sets. - J. Graph Theory, 1980, vol. 4, p. 301-307.*

[2] *Wong P.K. Cages - a survey. - J. Graph Theory, 1982, vol.6, p. 1-22.*

В случае $n > 1$ функция f изучалась в [1)-2)]. В частности, при ограничениях $k_1 \geq 3$, $m \geq 5$, там были найдены величины $f(3, k_2; 5)$, $f(3, k_2; 7)$, $f(3, 4; 6)$, $f(3, 4, k_3; 5)$ $(k_3 \geq 5)$. В §3 главы 2 получено усиление этих результатов. При этом следствия 3.3-3.4, 3.6 совпадают с теоремами Гоулда, Доунса, Митчема и Сабы, анонсированными в [1)].

В §4 главы 3 изучаются планарные графы, имеющие степенное множество $\{3\}$, т.е. кубические. Известно, что теорема о четырех красках эквивалентна следующему утверждению: каждый кубический граф без мостов представим в виде объединения системы циклов, которая не содержит нечетного полукольца. В [3)] отмечено, что при попытках найти альтернативное доказательство теоремы о четырех красках, мотивированное этим утверждением, возникает вопрос, какими нечетными полукольцами не обладают планарные кубические графы. Этот вопрос непосредственно связан со следующим критерием планарности, сформулированным в качестве гипотезы Литтлом [4)] и доказанным в §4 (теорема 3.6):

Критерий. Граф планарен, если и только если он не содержит максимального, точного, нечетного кольца.

(Кольцо - это полукольцо, обладающее условием согласованности ориентации своих циклов; строгие определения даны в §4). В качестве прямого следствия получается следующий критерий планарности кубических графов (независимо также полученный в [3)]):

---

1) Wong P.K. Cages - a survey. - J. Graph Theory, 1982, vol.6, p.1-22.

2) Chartrand G., Gould R.J., Kapoor S.F. Graphs with prescribed degree sets and girth. - Period. Math. Hungar., 1981, vol. 12, p. 261-266.

3) Little C.H.C. A characterization of planar cubic graphs. - J. Combin. Theory, 1980, vol. B29, p. 185-194.

4) Little C.H.C. On rings of circuits in planar graphs. - Lect. Notes Math., 1977, vol. 622, p. 133-140.

кубический граф планарен, если и только если он не содержит максимального, нечетного кольца.

Тем самым выявлен некоторый тип нечетных полуколец, которые не могут встречаться в планарных кубических графах.

Из доказательства гипотезы вытекает простое обоснование ранее громоздко доказанной теоремы Литтла-Холтона-Чена об элегантных кольцах (следствие 3.8).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

I. Тышкевич Р.И., Черняк А.А. Декомпозиция графов. - Кибернетика, I985, №2, с.67-74.
2. Тышкевич Р.И., Черняк А.А. Алгоритм канонического разложения графа и распознавания полярности.- Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, I985, №6, с.I6-23.
3. Тышкевич Р.И., Черняк А.А., Черняк Ж.А. О вынужденно Р-графических последовательностях.- ДАН БССР, I985, т.29, с.677-680.
4. Тышкевич Р.И., Черняк А.А.Униграфы.III.- Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, I979, №2, с.5-II.
5. Черняк А.А. К гипотезе Литтла о планарных графах.- Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, I980, №2, с.4I-45.
6. Черняк А.А. Связность графов с предписанными степенным множеством и порядком. Униграфичность.- ДАН БССР, I984, т.28, №5, с.400-403.
7. Черняк А.А., Черняк Ж.А. Надежность сетей, имеющих ограничения на степени узлов и каналов связи.- Тезисы докладов Всесоюзной конференции по повышению надежности машин и приборов, Куйбышев, I98I, с.386.
8. Черняк А.А., Черняк Ж.А. Алгоритмы распознавания обобщен-

ных полярных графов и определение их чисел независимости.- Тезисы докладов III Всесоюзного совещания "Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях", 1984, Новосибирск, с.123-125.

9. Tyshkevich R.I., Chernyak A.A. Box-threshold graphs: the structure and the enumeration.- 30. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau "Graphen und Netzwerke.- Theorie und Andwendungen," 1985, p. 119-121.

Подписано в печать I8 .03.86 АТ I7075
Формат 60х84/I6. Усл.печ.л. I,I6. Уч.-изд.л. 0,83
Тираж I00 экз. Заказ 94 . Бесплатно.
Ротапринт Института математики АН БССР.
220604, Минск-72, ул.Сурганова, II.