Белорусский государственный университет

УДК 517.15

Гуло Ирина Николаевна

Асимптотические оценки гауссовских континуальных интегралов, содержащих большой параметр

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 1998

Работа выполнена в Белорусском государственном педагогическом университете им. М. Танка

Научный руководитель — член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук,
профессор Янович Леонид Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Жидков Евгений Петрович;
доктор физико-математических наук,
профессор Русак Валентин Николаевич

Оппонирующая организация — Гродненский государственный университет

Защита состоится 11.12.98 в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций Д. 02.01.07 в Белорусском государственном университете (220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, Белгосуниверситет, главный корпус, к.206).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгосуниверситета.

Автореферат разослан "5" ноября 1998 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Килбас А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Изучение интегрировния по гауссовой мере в бесконечномерных пространствах начато работами Н.Винера в 20-х годах нашего века. Им была введена в пространстве непрерывных функций для исследования броуновского движения специальная мера, которую сейчас обычно называют "винеровской" или мерой Винера. Эта мера включается в более общий класс мер в функциональных пространствах, которые принято называть гауссовыми.

Начиная с 40-х годов, исследования по различным аспектам задачи интегрирования по мере Винера и некоторым смежным вопросам этой тематики значительно расширились.

Практическое использование функциональных интегралов основано на приближенных методах их вычислений. Первые работы по приближенному вычислению интегралов по гауссовой мере появились в 50-ых годах. Они относились к приближенному вычислению интегралов по мере Винера. В последние годы разработаны методы приближенного вычисления интегралов по мерам, соответствующим различным случайным процессам, и квазимерам.

Приближенное вычисление функциональных интегралов вызывает значительные трудности. Вместе с тем, наличие большого или малого параметров в таких интегралах делает задачу приближенного вычисления еще более сложной. Здесь значительную помощь оказывает знание асимптотики интегралов относительно этих параметров.

Асимптотика континуальных интегралов играет важную роль не только в задаче приближенного интегрирования, но и во многих других задачах анализа. Это делает задачу изучения асимптотики континуальных интегралов актуальной.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились в рамках госбюджетной научных программ: "Комплексное исследование многомерных дифференциальных систем", шифр "Дифференциал 3" (1986–1990 г.г.); "Аналитические, асимптотические и качественные методы дифференциальных уравнений", шифр "Дифференциал 4" (1991–1995 г.г.); "Исследование структурных свойств бесконечномерных ядерных динамических систем управления", шифр "Математические структуры 16".

Цель и задачи исследования. Целью работы было получение асимптотических оценок континуальных интегралов по гауссовым мерам. Для этого понадобилось дальнейшее развитие и обобщение при-

менительно к континуальным интегралам ряда методов классического асимптотического анализа:
— метода интегрирования по частям;
— метода Лапласа;
— метода последовательных разложений.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются гауссовские континуальные интегралы, интегрируемые функционалы которых содержат большой числовой параметр. Изучается асимптотика континуальных интегралов в общих линейных пространствах, в пространстве непрерывных функций и некоторых других. Рассмотрены интегралы по конкретным гауссовым мерам и от специального вида интегрируемых функционалов.

Методология и методы проведенного исследования. Используется аппарат классического анализа, общие подходы приближенных и асимптотических методов. Синтез этих подходов, применительно к задаче изучения асимптотики континуальных интегралов, позволил получить новые результаты в теории асимптотических методов функционального интегрирования.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Теория получения асимптотических оценок для континуальных интегралов, содержащих большой параметр, в настоящее время находится в стадии разработки. Число работ, посвященных данной тематике, невелико.

Необходимость в развитии этой теории вызвана решением многих практических задач. Получены новые асимптотические оценки для рассматриваемых классов интегралов по мерам Винера и общим гауссовым мерам. Выделены главные члены асимптотик, а в некоторых случаях и полные асимптотические разложения.

Практическая и экономическая значимость полученных результатов. Диссертация имеет, в основном, теоретическое значение. Приведенные в ней асимптотические оценки могут быть использованы, в частности, для изучения энергетических спектров квантомеханических систем и для приближенного вычисления континуальных интегралов.

Экономическую значимость результатов диссертации в настоящее время оценить не представляется возможным.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Получены асимптотические оценки и выделены главные члены асимптотики для функциональных интегралов по гауссовым мерам методами интегрирования по частям и Лапласа.

2. Методом Лапласа получена асимптотическая оценка и выделен

главный член асимптотики для одного вида кратных континуальных интегралов.

3. Перенесен на континуальные интегралы специального вида один из вариантов метода последовательных разложений.

4. Получены асимптотические оценки для специального вида интегралов по мере Винера и условной мере Винера.

Личный вклад соискателя. Основные результаты диссертационной работы получены автором лично. Результаты, приведенные в совместных работах с научным руководителем, получены на паритетных началах.

Апробация результатов диссертации. О результатах работы докладывалось в Белорусском государственном педагогическом университете им. М. Танка, на шестой конференции математиков Беларуси (г. Гродно, 1992), на международной конференции "Программирование и математические методы для решения физических задач" (г. Дубна, 1994), на международном семинаре "Нелинейные явления в сложных системах" (г. Минск, 1995), на международном семинаре "Интегралы по путям: теория и приложения" (г. Дубна, 1996), на научной конференции "Статистический и прикладной анализ временных рядов" (г. Брест, 1997), на конференции преподавателей БГПУ им. М. Танка "Фундаментальные проблемы математики" (г. Минск, 1997).

Опубликованность результатов. Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях научных журналов, в 5 статьях научных сборников, в 2 тезисах научных конференций.

Общее количество опубликованных материалов составляет 45 страниц.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников, включающего 106 наименований. Общий объем диссертации составляет 91 страницу машинописного текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** дана краткая оценка исследуемой проблемы, указаны основные методы получения асимптотических оценок, обоснована необходимость проведения исследований в этом направлении.

Глава 1 носит вспомогательный характер. В ней приводятся определения асимптотических оценок и даются основные их свойства. Кроме того приводится ряд фактов из теории гауссовских мер и интегралов по гауссовым мерам. В этой главе приведен обзор литературы по теме диссертации. Дается краткий очерк основных этапов развития асимптотических методов в данной области.

Глава 2 посвящена методу интегрирования по частям.

В разделе 2.1 приведена формула интегрирования по частям и формула, связывающая функционал с его вариацией по заданному направлению.

В разделе 2.2 для интеграла

$$I(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda g(x)} f(\lambda, x) d\mu(x) \tag{1}$$

(X— линейное топологическое пространство, $g(x), f(\lambda, x)$— заданные на X функционалы, $\mu(x)$— гауссова мера, λ — большой числовой параметр), в результате многократного применения формулы интегрирования по частям, получаем асимптотическое разложение

$$\int\limits_X e^{\lambda g(x)} f(\lambda, x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\lambda^k} g_k(\lambda) + r_n(\lambda)$$

относительно шкалы $\{\lambda^{-k} g_k(\lambda)\}$ $(k = \overline{1, n})$. Функционалы $g_k(\lambda)$ и $r_n(\lambda)$ задаются рекурентными формулами

$$g_k(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda g(x)} F_k(\lambda, x)(a_k, x) d\mu(x),$$

$$r_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} \int\limits_X e^{\lambda g(x)} \left(F_{n+1}(\lambda, x)(a_{n+1}, x) - \delta F_{n+1}[\lambda, x; a_{n+1}]\right) d\mu(x),$$

где

$$F_k(\lambda, x) = \delta F_{k-1}[\lambda, x; a_{k-1}] \delta^{-1} g[x; a_k],$$

a_k— элементы гильбертова пространства $\tilde{H}$, порожденного гауссовой мерой μ пространства X, а (a, x)—линейный измеримый на X функционал $(k = \overline{2, n+1})$.

Рассмотрено несколько частных случаев, когда $g(x)$ имеет вполне определенный вид. Получены асимптотические разложения для следующих интегралов

$$I(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda(a,x)} f(\lambda, x) d\mu(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\lambda^k} \left\{\prod_{j=1}^{k} (a, a_j)\right\}^{-1} g_k(\lambda) + \left\{\prod_{j=1}^{n+1} (a, a_j)\right\}^{-1} r_n(\lambda),$$

где, в этом случае, в выражениях для $g_k(\lambda)$ и $r_n(\lambda)$ следует положить

$$F_1(\lambda, x) = f(\lambda, x), \quad F_k(\lambda, x) = \delta^{k-1} f[\lambda, x; a_1, a_2, ..., a_{k-1}], \quad k = (\overline{2, n+1}),$$

т.е. $F_k(\lambda, x)$ — есть здесь $(k-1)$–я вариация функционала $f(\lambda, x)$ по направлениям $a_1, a_2, ...a_{k-1}$; $(a, a_i) \neq 0$; $i = \overline{1, n+1}$, $a \in \tilde{H}$. А также для интегралов

$$\int\limits_X e^{i\lambda q(<\varphi,x>)} f(\lambda, x) d\mu(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(i\lambda)^k} \left\{ \prod_{j=1}^{k} < \varphi, a_j > \right\}^{-1} g_k(\lambda) + \frac{(-1)^n}{(i\lambda)^{n+1}} \left\{ \prod_{j=1}^{n+1} < \varphi, a_j > \right\}^{-1} r_n(\lambda),$$

где

$$g_k(\lambda) = \int\limits_X e^{i\lambda q(<\varphi,x>)} b_k(\lambda, x) d\mu(x),$$

$$r_n(\lambda) = \int\limits_X e^{i\lambda q(<\varphi,x>)} \frac{b_{n+1}(\lambda, x) - \delta^{n+1} f[\lambda, x; a_1, ..., a_{n+1}]}{[q'(< \varphi, x >)]^{n+1}} d\mu(x).$$

При выделении главных членов асимптотики методом интегрирования по частям надо было находить для данного функционала первообразный.

Возможности этого метода проиллюстрированы на примерах, которые приведены в разделе 2.3.

В главе 3 получены асимптотические оценки для континуальных интегралов с помощью метода Лапласа. Как и в случае обычных интегралов, идея этого метода состоит в том, что наибольший вклад в значение континуального интеграла вида

$$F(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda g(x)} f(\lambda, x) d\mu(x)$$

дают интегралы по окрестностям тех точек, в которых функция $g(x)$ принимает наибольшее значение. Вычисление или оценки интегралов по этим окрестностям, а также по оставшемуся множеству области интегрирования, и составляют основную трудность применения метода Лапласа при исследовании асимптотики конкретных классов интегралов.

В разделе 3.1 рассмотрен интеграл вида

$$F(\lambda) = \int\limits_X f(x) \exp\{\lambda g(< \varphi, x >)\} d\mu(x), \tag{2}$$

где X – линейное топологическое пространство, $g(u)$ – числовая функция с областью определения $T \subseteq R$, $f(x)$ и $< \varphi, x >$ – заданные на X функционалы, причем $< \varphi, x >$ – линейный, λ– большой числовой параметр, μ – гауссова мера с нулевым средним значением $m(\varphi)$ и корреляционным функционалом $K(\varphi, \psi)$ $(\varphi, \psi \in X')$.

Была доказана

Теорема 3.1. *Пусть функция $g(u)$ и функционал $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*
1. Максимум $g(u)$ достигается только в одной точке u_0 $(u_0 \in T)$.
2. Функция $g(u)$ является $(2m+1)$-раз непрерывно дифференцируемой в точке u_0, $g'(u_0) = g''(u_0) = \dots = g^{(2m-1)}(u_0) = 0$, а $g^{(2m)}(u_0) = -q (q > 0)$.
3. Для всех $u \in T$ выполняется условие

$$g(u) - g(u_0) \le -l(u - u_0)^{2m}, l > 0.$$

4. Функционал $f(x)$ непрерывен в точке x_0, где $x_0 \in X$ такая, что $< \varphi, x_0 >= u_0$, в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $\Delta = \{x \in X :< \varphi, x - x_0 >^{2m} < \delta\}$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
5. $f(x_0) \neq 0$ и функционал $f(x)$ такой, что

$$\int\limits_X |f(x)| d\mu(x) = M < \infty.$$

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = I_1(\lambda)\Big[1 + o(1)\Big],$$

где

$$I_1(\lambda) = a(\lambda) \int\limits_R \exp\Big\{-v^{2m} - b(\lambda)\Big[\frac{1}{2}\Big\{\frac{(2m)!}{\lambda q}\Big\}^{\frac{1}{2m}} v^2 + u_0 v\Big]\Big\} dv,$$

$$a(\lambda) = \frac{f(x_0)}{\sqrt{2\pi B}}\Big[\frac{(2m)!}{q}\Big]^{\frac{1}{2m}} \exp\Big\{\lambda g(u_0) - \frac{u_0^2}{2B}\Big\} \lambda^{-\frac{1}{2m}},$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{B}\Big[\frac{(2m)!}{q}\Big]^{\frac{1}{2m}} \lambda^{-\frac{1}{2m}}, \quad B = K(\varphi, \varphi).$$

На основании этой теоремы была сформулирована

Теорема 3.2. *Пусть условия 1–5 теоремы 3.1 выполнены, тогда при $\lambda \to \infty$ для интеграла (2) имеет место равество*

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0)}{m\sqrt{2\pi B}}\Big[\frac{(2m)!}{q}\Big]^{\frac{1}{2m}} \Gamma\Big(\frac{1}{2m}\Big) \exp\Big\{\lambda g(u_0) - \frac{{u_0}^2}{2B}\Big\} \lambda^{-\frac{1}{2m}}\Big[1 + o(1)\Big].$$

Затем был рассмотрен более общий, чем (2), вид интегралов:

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda g(<\varphi, x>)} f(\lambda, x) d\mu(x). \tag{3}$$

И в этом случае доказана

Теорема 3.3. *Пусть функция $g(u)$ удовлетворяет условиям 1–3 теоремы 3.1, а функционал $f(\lambda, x)$ при больших λ условиям:*
4. $f(\lambda, x)$ — непрерывен в точке x_0 в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех x из окрестности

$$\Delta = \{x \in X :< \varphi, x - x_0 >^{2m} < \delta\}$$

будет выполняться неравенство $|f(\lambda, x) - f(\lambda, x_0)| < \varepsilon$.
5. $f(\lambda, x_0) \neq 0$ и функционал $f(\lambda, x)$ такой, что

$$\int\limits_X |f(\lambda, x)| d\mu(x) = M < \infty.$$

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$\Phi(\lambda) = \frac{f(\lambda, x_0)}{m\sqrt{2\pi B}} \Big[\frac{(2m)!}{q}\Big]^{\frac{1}{2m}} \Gamma\Big(\frac{1}{2m}\Big) \exp\Big\{\lambda g(u_0) - \frac{{u_0}^2}{2B}\Big\} \lambda^{-\frac{1}{2m}} \Big[1 + o(1)\Big].$$

Далее рассматривался интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_X e^{\lambda\varphi(|v(x)|)} f(\lambda, x) d\mu(x),$$

где $\varphi(u)$ — дифференцируемая на луче $[0; +\infty)$ функция, $v(x)$ и $f(\lambda, x)$— функционалы, заданные на X. И для него доказана

Теорема 3.4. *Пусть $v(x)$ измеримый функционал и $f(\lambda, x) \geq 0$ на X, функция $\varphi(u)$ достигает максимума в единственной нулевой точке и $\varphi''(0) = -q$ $(q > 0)$, а ее третья производная $\varphi'''(u)$ в точке su, где $0 < s < 1$, удовлетворяет следующим условиям:*
1. $\varphi'''(su) \leq 0$, $u \geq 0$;
2. $\varphi'''(su)u^3 \to 0$ при $u \to +\infty$;
3.$-c_0 \leq \varphi'''(su)u^2, 0 < c_0 \leq M < \infty$.
Тогда

$$F(\lambda) = e^{\lambda\varphi(0)} \int\limits_X e^{-\frac{\lambda q}{2} v^2(x)} f(\lambda, x) d\mu(x) \Big[1 + o(1)\Big].$$

В разделе 3.2 дается асимптотическая оценка для интеграла (3), когда функция $g(u)$ имеет максимум в двух точках. Доказана

Теорема 3.5. *Пусть функция $g(u)$ и функционал $f(\lambda, x)$ удовлетворяют следующим условиям:*
1. $g(u)$ достигает максимума в точках $u_1, u_2 \in T$.
2. $g(u)$ трижды непрерывно дифференцируема в точках u_1, u_2 и

$g'(u_1) = g'(u_2) = 0, \; g''(u_1) = -q_1, \; g''(u_2) = -q_2 \;\; (q_1 > 0, q_2 > 0).$

3. Для всех $u \in T_1$ выполняется условие

$$g(u) - g(u_1) \leq -l(u - u_1)^2, \;\; g(u) - g(u_2) \leq -l(u - u_2)^2$$

где $l > 0$.

4. Функционал $f(\lambda, x)$ непрерывен в точках $x_1, x_2 \in X$, где x_1, x_2 такие, что $< \varphi, x_1 >= u_1, < \varphi, x_2 >= u_2$, в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$, что для всех x из окрестностей

$$\Delta_1 = \{x \in X :< \varphi, x - x_1 >^2 < \delta_1\}, \quad \Delta_2 = \{x \in X :< \varphi, x - x_2 >^2 < \delta_2\}$$

будет выполняться неравенство

$$|f(\lambda, x) - f(\lambda, x_1)| < \varepsilon,$$

$$|f(\lambda, x) - f(\lambda, x_2)| < \varepsilon.$$

5. $f(\lambda, x_1) \neq 0, \;\; f(\lambda, x_2) \neq 0$ и функционал $f(\lambda, x)$ такой, что

$$\int_X |f(\lambda, x)| d\mu(x) = M < \infty.$$

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = (I_1(\lambda) + I_2(\lambda))\Big[1 + o(1)\Big],$$

где

$$I_i(\lambda) = a_i(\lambda) \int_R \exp\Big\{-v^2 - b_i(\lambda)\Big[\frac{1}{2}\Big\{\frac{2}{\lambda q_i}\Big\}^{\frac{1}{2}} v^2 + u_i v\Big]\Big\} dv,$$

$$a_i(\lambda) = \frac{f(\lambda, x_i)}{\sqrt{B q_i \pi \lambda}} \exp\Big\{\lambda g(u_i) - \frac{u_i^2}{2B}\Big\},$$

$$b_i(\lambda) = \frac{1}{B}\Big[\frac{2}{q_i \lambda}\Big]^{\frac{1}{2}}, \;\; (i = 1, 2) \;\; B = K(\varphi, \varphi).$$

В разделе 3.3 дается конкретизация отдельных результатов предыдущих разделов и получены другие асимптотические оценки для некоторых специальных классов интегралов в случае пространства непрерывных функций $C[a, b]$.

Получены, в частности, следующие асимптотические оценки:

$$\int_C f(x) \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \int_0^1 x^2(t) dt\right\} d_W x = f(0) ch^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\lambda} [1 + o(1)];$$

$$\int\limits_C f(x)\exp\left\{\lambda\varphi\left[\int\limits_a^b x(t)dt\right]\right\}d\mu(x) =$$

$$= \frac{f(x_0)e^{\lambda\varphi(u_0)}}{\sqrt{2\lambda qK+1}}\exp\left(-\frac{\lambda q u_0^2}{2\lambda qK+1}\right)[1+o(1)],$$

где $u_0 = \int\limits_a^b x(t)dt$ — невырожденная точка максимума функции $\varphi(u)$, $-q = \frac{\varphi''(u_0)}{2}, q > 0,\ K = \int\limits_a^b\int\limits_a^b B(t,s)dtds, B(t,s)$ — корреляционная функция гауссовой меры μ;

$$\int\limits_C \exp\left\{\lambda\varphi\left[\left\{\int\limits_a^b x(t)dt\right\}^2\right]\right\}f(x)d\mu(x) =$$

$$= \frac{f(x_0)e^{\lambda\varphi(u_0)}\sqrt{4\lambda q u_0 K+1}}{4K\sqrt{\pi\lambda q}}\exp\left(-\frac{(4\lambda q u_0 K-1)^2-2}{32\lambda qK^2}\right)\times$$

$$\times K_{1/4}\left(\frac{(4\lambda q u_0 K+1)^2}{32\lambda qK^2}\right)[1+o(1)],$$

где $K_{1/4}\left(\frac{b^2}{2a}\right) = \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{b^2}{2a}cht\right\}ch\frac{t}{4}dt.$

В разделе 3.4 рассматриваются интегралы вида

$$F(x) = \int\limits_X \exp\{\lambda g(<\varphi,x>)\}f(x)d\mu(x), \qquad (4)$$

где $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, X_i — линейное топологическое пространство, $g(u) = g(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ — заданная действительная функция от n переменных, $<\varphi,x> = (<\varphi_1,x_1>,<\varphi_2,x_2>,\ldots,<\varphi_n,x_n>)$, $<\varphi_i,x_i>$ — линейный непрерывный функционал на X_i, $d\mu(x) = d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2)\cdots d\mu_n(x_n)$, μ_i — гауссова мера, задаваемая нулевым средним значением $m_i(\varphi) \equiv 0$ и корреляционным функционалом $K_i(\varphi,\psi)(\varphi,\psi \in \in X_i')$, $i=\overline{1,n}$. Для них доказана

Теорема 3.6. *Пусть функция* $g(u) = g(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ ($u \in R^n$) *и функционал* $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1. $g(u)$ *достигает максимум только в одной точке* $u_0 = (u_1^0,u_2^0,\ldots,u_n^0)$.

2. $g(u)$ *трижды дифференцируема в* R^n *функция, причем*

$$\frac{\partial^2 g(u_0)}{\partial u_i \partial u_j} = 0 \quad (i \neq j), \left|\frac{\partial^3 g(u)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}\right| \leq c,$$

($i, j, k = \overline{1, n}$, c — некоторая постоянная) в окрестности точки u_0.
3. Для всех $u \in R^n$ выполняется условие

$$g(u) - g(u_0) \le -l \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i^0)^{2m}, \ \ l > 0.$$

4. Функционал $f(x)$ непрерывен в точке x_0, (здесь $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ такая, что $(< \varphi_1, x_1^0 >, < \varphi_2, x_2^0 >, ..., < \varphi_n, x_n^0 >) = u_0$.) в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $\Delta = \{x \in X : \sum\limits_{i=1}^{n} < \varphi_i, x_i - x_i^0 >< \delta\}$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
5. $f(x_0) \ne 0$ и функционал $f(x)$ такой, что

$$\int\limits_X |f(x)| d\mu(x) = M < \infty.$$

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0) \exp\{\lambda g((u_0))\}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (\lambda q_i B_i + 1)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (u_i^0)^2}{\lambda q_i B_i + 1}\right\} [1 + o(1)],$$

где $\frac{\partial^2 g(u_0)}{\partial {u_i}^2} = -q_i$ $(q_i > 0)$, $B_i = K_i(\varphi_i, \varphi_i)$.

Отдельно рассмотрен двумерный случай для интеграла (4) и сформулирована аналогичная теорема.

В последней **главе 4** получены асимптотические оценки для специального вида континуальных интегралов по мере Винера и условной мере Винера, а также рассмотрен вариант континуального аналога метода последовательных разложений А.Н. Тихонова и А.А. Самарского.

В разделе 4.1 с помощью аналога метода последовательных разложений для интеграла

$$J(\lambda) = \int\limits_X \omega(\lambda, x) F(\lambda, x) d\mu(x),$$

где функционал $\omega(\lambda, x)$ можно представить в виде

$$\omega(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\lambda, x)}{\lambda^{\mu_k}} + \rho_n(\lambda, x),$$

$a_k(\lambda, x)$ $(k = \overline{0, n})$ и $\rho_n(\lambda, x)$ $(n = \overline{0, N})$ заданные зависящие от λ функционалы, определенные на X, а $\{\mu_k\}$ — последовательность неотрицательных действительных чисел, доказана

Теорема 4.1. *Имеет место равенство*

$$J(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{b_k(\lambda)}{\lambda^{\mu_{k-1}}}+\frac{c_k(\lambda)}{\lambda^{\mu_k}}\right]+r_n(\lambda),$$

где

$$b_k(\lambda)=\int\limits_X \omega_k(\lambda,x)\Phi_k(\lambda,x)d\mu(x),$$

$$c_k(\lambda)=\int\limits_X a_k(\lambda,x)F_{k+1}(\lambda,x)d\mu(x), r_n(\lambda)=\int\limits_X \rho_n(\lambda,x)F_{n+1}(\lambda,x)d\mu(x),$$

$\{\Phi_k(\lambda,x)\}_{k=0}^{n}$ – *произвольная система функционалов, а функционалы* $\omega_k(\lambda,x)$ *и* $F_k(\lambda,x)$ *определяются рекурентными формулами*

$$\omega_{k+1}(\lambda,x)=\lambda^{\mu_k-\mu_{k-1}}\omega_k(\lambda,x)-a_k(\lambda,x), F_{k+1}(\lambda,x)=$$

$$=F_k(\lambda,x)-\Phi_k(\lambda,x),\ \ (k=\overline{0,n}).$$

Здесь $\omega_0(\lambda,x)=\omega(\lambda,x), F_0(\lambda,x)=F(\lambda,x), \mu_{-1}=0.$

С помощью этой теоремы для интеграла

$$J(\lambda)=\int\limits_C cos\left\{\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 x(t)dt\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(t)dt\right\}d_W x$$

выделен главный член и получена асимптотическая оценка

$$J(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{cos1}}+\frac{tg1-1}{2\lambda^2\sqrt{cos1}}+\frac{tg1-1}{4\lambda^4\sqrt{cos1}}+o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).$$

В разделе 4.2 получены асимптотические разложения функциональных интегралов вида

$$\int\limits_C e^{\lambda\varphi(\|x\|)}f(\lambda,x)d\mu(x),$$

где $\mu(x)$– мера Винера или условная мера Винера на пространстве $C=$ $=C[0,1]$, $\|x\|^2=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$, а функция $\varphi(u)$ и функционал $f(\lambda,x)$ удовлетворяют указанным далее условиям .

Сначала рассмотрен случай меры Винера W, соответствующий винеровскому процессу с корреляционной функцией $B(t,s)=\min(t,s)$ и нулевым средним значением. А затем изучены, аналогично предыдущему случаю, асимптотики интегралов такого же вида, но по условной мере Винера с тем же средним значением и корреляционной функцией $B(t,s)=\min(t,s)-ts$. Для получения основного результата раздела доказывются в начале две леммы.

Лемма 4.1. *Для интеграла*

$$I_0(\lambda) = \int\limits_C e^{-\frac{\lambda^2}{2}\|x\|^2} d_W x$$

справедливо равенство

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} I_0(\lambda) = \frac{(-1)^k}{2^k} I_0(\lambda) th^k \lambda + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \alpha_\nu I_0^{4\nu+1}(\lambda) th^{k-2\nu} \lambda,$$

где $\left[\frac{k}{2}\right]$ *– целая часть числа* $\frac{k}{2}$, α_ν *– числа, которые не зависят от* λ.

Лемма 4.2. *Для интегралов*

$$\int\limits_C e^{-\frac{\lambda^2}{2}\|x\|^2} \|x\|^{2k} d_W x$$

справедливо равенство

$$\int\limits_C e^{-\frac{\lambda^2}{2}\|x\|^2} \|x\|^{2k} d_W x = \frac{1}{(2\lambda)^k} th^k \lambda ch^{-1/2} \lambda \left[1 + o(1)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

при $\lambda \to \infty$.

Для интегралов указанного вида по мере Винера справедлива

Теорема 4.2. *Пусть функция* $\varphi(u)$ *имеет единственный максимум в точке* $u = 0$, *причем* $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -q$ $(q > 0)$ *и выполняются другие условия теоремы 3.4, а для функционала* $f(\lambda, x)$ *справедливо разложение*

$$f(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda) \|x\|^{2k} + r_n(\lambda, x) \|x\|^{2n+2},$$

где $x \in C[0;1]$, $a_{k+1}(\lambda) = O\left(a_k(\lambda)\lambda^{\alpha_k}\right)$, $a_k(\lambda) > 0$,
$0 \le \alpha_k < 1/2$, $|r_n(\lambda, x)| \le M a_n(\lambda) \lambda^{\alpha_n}$ $(0 \le M < \infty)$. *Тогда*

$$\int\limits_C e^{\lambda\varphi(\|x\|)} f(\lambda, x) d_W x = \frac{e^{\lambda\varphi(0)}}{ch^{1/2}\sqrt{\lambda q}} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\lambda)}{(2\sqrt{\lambda q})^k} th^k \sqrt{\lambda q} \left[1 + o(1)\right].$$

Для случая условной меры Винера W^* было получено асимптотическое равенство

$$\int\limits_C e^{-\frac{\lambda^2}{2}\|x\|^2} \|x\|^{2k} d_{W^*} x = \frac{1}{(2\lambda)^k} cth^k \lambda \left(\frac{\lambda}{sh\lambda}\right)^{1/2} \left[1 + o(1)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

на основании которого доказана

Теорема 4.3. *Пусть функция $\varphi(u)$ и функционал $f(\lambda, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2. Тогда*

$$\int\limits_C e^{\lambda\varphi(\|x\|)} f(\lambda, x) d_{W^*} x =$$

$$= e^{\lambda\varphi(0)} \left(\frac{\sqrt{\lambda q}}{sh\sqrt{\lambda q}}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\lambda)}{(2\sqrt{\lambda q})^k} cth^k \sqrt{\lambda q}\, [1 + o(1)] .$$

В конце раздела приводятся два примера, иллюстрирующие использование полученных оценок.

В разделе 4.3 получена асимптотическая оценка для интегралов вида

$$\int\limits_{C_2} e^{\lambda\varphi(\|x\|)} f(\lambda, x) d_W x,$$

где $C_2 = C_2(Q)$ — пространство непрерывных на квадрате $Q = [0;1] \times [0;1]$ функций двух переменных $x = x(t, s)$, функция $\varphi(u)$ и функционал $f(\lambda, x)$ удовлетворяют указанным далее условиям, $\|x\|^2 = \int\limits_Q x^2(t;s)dtds$. Мера Винера W задается здесь нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t;s) = \frac{1}{2}\min(t_1;s_1)\min(t_2;s_2)$ $(t, s \in Q,\ t = (t_1;t_2),\ s = (s_1;s_2))$. Обозначим

$$\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)\pi} th \frac{2\lambda}{(2i-1)\pi}.$$

Лемма 4.4. *Для производной k-го порядка функции $\sigma(\lambda)$ справедливо равенство*

$$\sigma^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \alpha_{kj} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{k+1}\pi^{k+1}} th^{k-1-2j} \frac{2\lambda}{(2i-1)\pi} ch^{-2} \frac{2\lambda}{(2i-1)\pi},$$

где α_{kj} –некоторые не зависящие от λ числа, $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{k-1}{2}$.

Лемма 4.5. *Для интеграла*

$$I_0(\lambda) = \int\limits_{C_2} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\|x\|^2} d_W x$$

справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} I_0(\lambda) = (-1)^n I_0(\lambda) \sigma^n(\lambda) [1 + o(1)], (\lambda \to \infty).$$

На основании этих лемм доказывается

Теорема 4.4. *Пусть функция $\varphi(u)$ имеет единственный максимум в нулевой точке, причем $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -q$ $(q > 0)$ и выполняются другие условия теоремы 3.4, а для функционала $f(\lambda, x)$ справедливо разложение*

$$f(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda)\|x\|^{2k} + r_n(\lambda, x)\|x\|^{2n+2},$$

где $x \in C_2(Q)$, $a_{k+1}(\lambda) = O\left(a_k(\lambda)\lambda^{\alpha_k}\right)$, $a_k(\lambda) > 0$,
$0 \le \alpha_k < 1/2$, $|r_n(\lambda, x)| \le M a_n(\lambda)\lambda^{\alpha_n}$ $(0 \le M < \infty)$. *Тогда*

$$F(\lambda, x) = I_0(\lambda)e^{\lambda\varphi(0)} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\lambda)}{(\sqrt{\lambda q})^k}\sigma^{(k)}(\lambda)\left[1 + o(1)\right] \ (\lambda \to \infty).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной диссертационной работе перенесены некоторые из методов классического асимптотического анализа на континуальные интегралы. В результате:

1. С помощью аналога метода интегрирования по частям получены асимптотические разложения для определенного вида континуальных интегралов по асимптотической шкале, элементы которой удовлетворяют рекурентным соотношениям. Результаты опубликованы в [1, 9].

2. Метод Лапласа перенесен на класс континуальных интегралов по пространству непрерывных функций и для интегралов по любому линейному пространству. Получены асимптотические оценки и выделены главные члены асимптотики для интегралов, подынтегральные функционалы которых удовлетворяют определенным условиям, а также, подынтегральный функционал которых содержит в аргументе экспоненциального множителя функционал, имеющий две критические точки. С помощью метода Лапласа получена асимптотическая оценка и выделен главный член асимптотики для одного вида кратных интегралов [2 — 5].

3. Для континуальных интегралов специального вида применен один из вариантов метода последовательных разложений, предложенный А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским для однократных интегралов. В результате получена асимптотическая оценка, которая включает в себя произвольную систему функционалов, что может быть удобным на практике при построении асимптотик для конкретных интегралов [6].

4. Получены асимптотические оценки для интегралов по мере Винера и условной мере Винера [7, 8, 10].

Каждый метод сопровождается иллюстрацией построения асимптотик для интегралов по конкретным линейным пространствам с различными гауссовыми мерами. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при построении асимптотических оценок континуальных интегралов, а также для приближенного вычисления этих интегралов.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи в научных журналах и рецензируемых научных сборниках

1. Янович Л.А., Лопатюк (Гуло) И.Н. Получение асимптотических разложений континуальных интегралов по гауссовой мере методом интегрирования по частям // Докл. Акад. наук Беларуси. — 1992. — Т. 36, №1. — С. 5–8.

2. Гуло И.Н. Асимптотические оценки для гауссовых континуальных интегралов по пространству непрерывных функций // Линейные функционально-дифференциальные соответствия: Сб. научн. ст./Минский пединститут им. А.М. Горького; Редсовет Ю.А. Быкадоров, Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец. — Минск, 1993. — С. 37–41.

3. Янович Л.А., Гуло И.Н. Построение асимптотических оценок для одного класса континуальных интегралов // Докл. Акад. наук Беларуси. — 1994. — Т. 38, №5. — С. 5–9.

4. Yanovich L.A., Gulo I.N. Asymptotic Estimates for a class Functional Integrals // Proceed. Intern. Conferen. "Program. and Mathem. Techniques in Physics" / World Scientific. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994. — P. 10–13.

5. Yanovich L.A., Gulo I.N. On an Asymptotic Expansion of Some Functional Integrals, Involving Large Parameter // Proceed. Fourth. Annual Seminar "Nonlinear phenomena in complex systems". — Minsk, 1996. — P. 233–238.

6. Yanovich L.A., Gulo I.N. Some Asymptotic Formulas for Functional Integrals // Proceed. Intern. Seminar "Path Integrals: Theory and Applications" and 5th Intern. Conf. "Path Integrals From meV TO MeV". — Dubna, 1996. — P. 364–368.

7. Гуло И.Н. Асимптотическая формула для одного вида винеровских интегралов в пространстве непрерывных функций двух переменных // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Труды международн. научн. конф., Брест, 11–13 ноября 1997 / Мин-во образования РБ. Бел. гос. ун-т. Брестский гос. ун-т. — Брест, 1997. — С. 171–178.

8. Гуло И.Н. Асимптотические оценки для интегралов Винера специального вида // Весцi Нац. Акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 1998. — №1. — С. 46–51.

Тезисы докладов

9. Гуло И.Н. Применение формулы интегрирования по частям к изучению асимптотики континуальных интегралов // Конференция математиков Беларуси : Тез. докл. Ч. 2, Гродно, 29 сент.– 2 окт. 1992 / Гродн. гос. ун-т — Гродно, 1992. — С. 133.

10. Гуло И.Н. Об асимптотике функционалоных интегралов по гауссовой мере // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Материалы международн. научн. конф., SAATS-97, Брест, 11–13 ноября 1997 / Брестский гос. ун-т. — Брест, 1997. — С. 55–56.

РЕЗЮМЕ

Гуло Ирина Николаевна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ГАУССОВСКИХ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР

Ключевые слова: функциональный интеграл, гауссовая мера, мера Винера, асимптотическая оценка, метод Лапласа, метод интегрирования по частям, метод последовательных разложений.

Объектом исследования диссертационной работы являются гауссовские континуальные интегралы, интегрируемые функционалы которых содержат большой числовой параметр. Изучается асимптотика континуальных интегралов в линейных пространствах.

Целью работы было получение асимптотических оценок для такого класса континуальных интегралов. Для этого понадобилось дальнейшее развитие и обобщение применительно к континуальным интегралам ряда методов классического асимптотического анализа.

При исследовании использовался аппарат классического анализа, общие подходы приближенных и асимптотических методов. Синтез этих подходов применительно к задаче изучения асимптотики континуальных интегралов позволил получить новые результаты в теории асимптотических методов функциональных интегралов.

В результате получены новые асимптотические оценки для рассматриваемых классов интегралов по мерам Винера и общим гауссовым

мерам. Выделены главные члены асимптотик, а в некоторых случаях и полные асимптотические разложения.

Необходимость в развитии этой теории вызвана решением многих практических задач. Приведенные в диссертации асимптотические оценки могут быть использованы, в частности, для изучения энергетических спектров квантомеханических систем и для приближенного вычисления континуальных интегралов.

РЭЗЮМЭ

Гуло Ірына Мікалаеўна

АСІМПТАТЫЧНЫЯ АЦЭНКІ ГАЎСАЎСКІХ КАНТЫНУАЛЬНЫХ ІНТЭГРАЛАЎ, ЯКІЯ ЗМЯШЧАЮЦЬ ВЯЛІКІ ПАРАМЕТР

Ключавыя словы: функцыянальны інтэграл, гаўсава мера, мера Вінера, асімптатычная ацэнка, метад Лапласа, метад інтэгравання па частках, метод набліжаных раскладаў.

Аб'ектом даследавання дысертацыйнай работы з'яўляюцца гаўсаўскія кантынуальныя інтэгралы, інтэгравальныя функцыяналы якіх змяшчаюць вялікі лікавы параметр. Вывучаецца асімптотыка кантынуальных інтэгралаў у лінейных прасторах.

Мэтай работы было атрыманне асімптатычных ацэнак для такого класу кантынуальных інтэгралаў. Для гэтага патрабавалася далейшае развіццё і абагульненне ў прымяненні да кантынуальных інтэгралаў шэрагу метадаў класічнага асімптатычнага аналізу.

Пры даследаванні выкарыстоўваўся апарат класічнага аналізу, агульныя падыходы прыблізных і асімптатычных метадаў. Сінтэз гэтых падыходаў у прымяненні да задачы вывучэння асімптотыкі кантынуальных інтэгралаў дазволіў атрымаць новыя вынікі ў тэорыі асімптатычных метадаў для функцыянальных інтэгралў.

У выніку атрыманы новыя асімптатычныя ацэнкі для разгледжаных класаў інтэгралаў на мерах Вінера і агульных гаўсавых мерах. Вылучаны галоўныя члены асімптотык, а ў некаторых выпадках і поўныя асімптатычныя расклады.

Неабходнасць у развіцці гэтай тэорыі выклікана рашэннем многіх практычных задач. Асімптатычныя ацэнкі, якія прыведзены ў дысертацыі, можна выкарыстоўваць, у прыватнасці, для вывучэння энергетычных спектраў квантомеханічных сістем і для прыблізнага вылічэння кантынуальных інтэгралаў.

SUMMARY

Gulo Irina Nikolaevna

ASYMPTOTIC VALUATIONS OF GAUSSIAN CONTINUAL INTEGRALS INVOLVING LARGE PARAMETERS

Key words: Functional integral, Gaussian measure, Wiener measure, asymptotic valuation, Laplace method, method of integration by parts, method of sequential expressions.

The object of research of this work are Gaussian Continual integrals, the integrated functionals of which contain a large numerical parameter. Asymptotic of continual integrals in linear space is studied.

The aim of this work is obtaining of asymptotic valuations for such class of continual integrals. For this purpose further development and generalization of a number of metods of classical asymptotic analysis in reference to continual integrals became necessary.

In research a system of classical analysis and general approaches of approximate and asymptotic methods were used. Synthesis of this approaches in reference to the task of studying of asymptotics of continual integrals made it possible to obtain new results in the theory of asymptotic methods of functional integrals.

As a result new asymptotic valuations for the above mentioned classes of Wiener integrals and of integrals with respect to the Gaussian measures, main parts of asymptotics and full asymptotic expansions in some cases are obtained.

The necessity in the development of this theory is caused by the solution of many practical problems. The asymptotic valuations given in it can be used for the studying of power spectrum of quantummechanical systems in particular and for the approximate calculations of continual integrals.

Подписано в печать 26.10.98. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,39. Тираж 100 экз. Зак. 650. Бесплатно.

Отпечатано в Издательском центре Белгосуниверситета.
Белгосуниверситет. 220050, Минск, пр. Ф.Скорины, 4.