ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ФЕВРАЛЬ **№ 2** **ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК**

ТОМ XVII

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1981

ФЕВРАЛЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 2

УЦК 517.938.5

И. Г. ПЕТРОВСКАЯ

ТМ-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И КЛАССИФИКАЦИЯ НЕКОМПАКТНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одной из задач теории динамических систем является задача классификации их инвариантных множеств. Эта классификация основывается на том или ином понятии эквивалентности инвариантных множеств. Одним из возможных подходов является подход, основанный на понятии топологической эквивалентности. Этими вопросами занимались многие авторы (см., например, [1 — 6]), причем некоторые из них пользовались при этом различными вариантами понятия топологической эквивалентности инвариантных множеств [1 — 3]. В работах [1,2] топологически различные классы инвариантных множеств вводили, следуя В. В. Немыцкому [5], по свойствам предельных множеств соответствующих траекторий.

По некоторым соображениям более естественным является определение топологической эквивалентности, данное Л. Э. Рейзинем [3], но поскольку необходимые для классификации свойства предельных множеств не являются инвариантами таких преобразований, то для классификации пришлось бы привлекать дополнительные свойства траекторий, и поэтому принятый в данной статье подход близок к [1, 2]. Классификация, связанная с определением Л. Э. Рейзиня, представляет собой отдельную задачу.

Отметим, однако, что и при определении работ [1,2], и при определении работы [3] неразличимыми, вообще говоря, в случае некомпактных инвариантных множеств будут такие грубые свойства, как устойчивость и неустойчивость (по Ляпунову). Поэтому для различения устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств на соответствующий гомеоморфизм приходится налагать некоторые дополнительные ограничения. Эти ограничения связаны с метрическими свойствами пространства, в котором определена динамическая система. Поэтому соответствующее отношение эквивалентности будем называть ГМ-эквивалентностью.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть M_F — произвольное метрическое пространство, F — динамическая система на нем; $f(p, t)$, $f(p)$, $f^{+}(p)$, *f~{p)*— движение, траектория, положительная полутраектория и отрицательная полутраектория этой системы, порожденные точкой *p£M_p*. Через S_f будем обозначать замкнутое инвариантное множество системы F. Определение всех этих понятий можно найти в [7].

Наряду с системой F будем рассматривать динамическую систему G, определенную на метрическом пространстве M_a. Символы $g(p, t)$, $g(p)$, $g^{+}(p)$ *51* *g~{p)* имеют для системы G тот же смысл, что и символы / *(p, t)*, *f(p).* *Г(p)*, *Г(p)* Для системы F.

Обозначим $U(S_f)$ окрестность множества S_f (открытое подмножество пространства M_F, содержащее множество S_f), $U_e(S_f)$ — множество $\{p£M_F/$ р $(p,\ S_f)$ с е}, $U_t(S_f)$ — замыкание множества (в пространстве M_F), $T_t(S_f)$ = = $\{p£M_F/p(p,\ Sf)\ —\ e\}$.

Определение 1. Допустимой окрестностью (D-окрестностью) инвариантного множества S_f называется окрестность $U(S_f)$ такая, что существует е > 0, для которого $U_{\&}(S_f)$ *cz* $U(Sf)$.

Лемма 1. Пусть S_f — компактное в M_F инвариантное множество. Тогда любая его окрестность $U(S_f)$ является D-окрестностью.

Доказательство. Предположим от противного, что некоторая окрестность $U(S_f)$ не является D-окрестностью. Тогда для произвольной последовательности (е„) | +0 можно указать последовательность точек $pn£M_P$ такую, что (ул £ N) $[p_n$ £ U^ (S_f) ^ p_n $ $U(S_f)]$. Очевидно, что последовательность (p_n) обладает свойством: существует равный нулю $\lim\limits_{п\text{-}*\text{-}\infty} p(p_n,\ Sf)$ и в силу компактности S_f существует точка $q£S_f$, являющаяся предельной точкой множества $\{p_п\}$. Действительно, для каждого можно указать точку $q_n£S_f$ такую, что $р(p_n,\ q_n)<2e_n$. Поскольку S_f — компакт, то из последовательности (q_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (q_{nk}), и пусть q — $\lim\limits_{\infty} q_{nr}$ Тогда, очевидно, q = = $\lim\limits_{\infty}$ pn_k, т. е. q — предельная точка $\{p_n\}$. Так как $S_fc{=}U(S_f)$, то q £ $U(Sf)$; но $U(S_f)$ — открытое множество, и поэтому q — его внутренняя точка, чего быть не может, ибо в любой окрестности точки q находятся точки множества $\{p_п\}$, каждая из которых не принадлежит $U(S_f)$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Следствие. *Пусть замкнутое инвариантное множество S_f обладает окрестностью $V^*(S_f)$ такой, что ее замыкание $U^*(S_f)$ ~ компакт. Тогда любая окрестность $U(S_f)$ является D-окрестностью.*

Определение 2. Гомеоморфизм ср:^(SJ-^M! некоторой D-окрестности U (5) множества S с: M_F в метрическое пространство Mу называется S-гомеоморфизмом, если существуют е*>0 и б*>0 такие, что для всех 0<е^е* и 0<6^б* множества ф$(U_E$(S)) и $ф^{-1}$ (£$У_6$(ф(S))) являются D-окрестностями множеств ф *(S)* и *S* соответственно.

Можно показать, что это определение эквивалентно следующему:

Определение 2*. Гомеоморфизм ф *:U (S)-> My* некоторой окрестности *U (S)* множества S $cz\ M_F$ в метрическое пространство *My* называется S-гомеоморфизмом, если выполняются следующие два условия:

1. Dq, = U(5) — D-окрестность множества 5.

2. Каковы бы ни были *Uy(S) cz U (S)* и £/$_2$(9(S))с=9(t/(S)), — D-окрестности множеств S и ф(5) соответственно, множества ф(i/$_4$(5)) и $Ф^{-1}$ $(U_2$ (ф (S))) являются D-окрестностями множеств ф *(S)* и S соответственно.

Лемма 2. *Пусть S cz M_F —компакт. Тогда любой гомеоморфизм* ф-.t/ (S)->- *My являеmся* S-гомеоморфизмом.

Справедливость этой леммы следует из утверждения леммы 1 и того, что гомеоморфный образ компакта — компакт.

Следствие. *Пусть замкнутое в M_F множество S обладает e_0-окрестностью U_{Eo} (S) такой, что ее замыкание $U_{Eo}(S)$ — компакт. Тогда любой гомеоморфизм* ф :£/$_e$(S)*My*, 0<s<!е$_0$, *является S-гомеоморфизмом.*

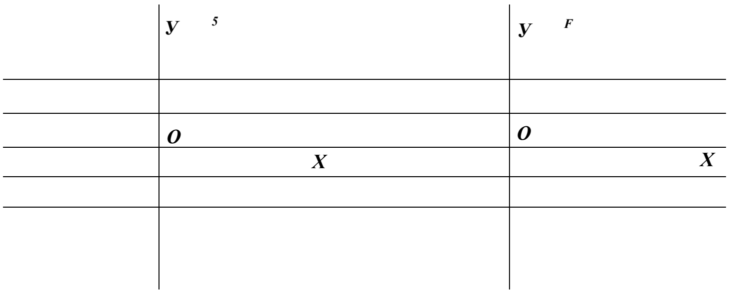
Определение 3. Инвариантные множества S_f и S_g динамических систем *F* и *G* соответственно называются ТТИ-эквивалентными, если существует Sy-гомеоморфизм ф : *U* *(S_f)-^M_a* (*U* *(S_f)*—D-окрестность множества Sf) такой, что:

1. $5_г$ = $_ф(5_/)$.

2. **(У** *€ (U (S_f) \ S_f))* **[Ф (***/ (p)* **П** *U [Sf))* = *g* **(Ф** *(p))* **Л Ф** *(U (S_f))].*

Инвариантные множества S_f и S_g, не являющиеся *ТМ*-эквивалентными, будем называть ТМ-различными.

Следствия лемм 1 и 2 показывают, что в случае замкнутого множества *Sf,* обладающего окрестностью $U_e(S_f)$, замыкание которой — компакт, условие S^-гомеоморфности гомеоморфизма ф является тривиально выполнимым и приведенное здесь определение 77И-эквивалентности совпадает с



используемым в [1, 2] определением топологической эквивалентности инвариантных множеств.

Покажем на примере, что условие Sy-гомеоморфности ф является существенным для различения, в частности, устойчивых и неустойчивых по Ляпунову инвариантных множеств (определение устойчивых и неустойчивых по Ляпунову инвариантных множеств можно найти в [2, 7]).

П р и м е р. Пусть $M_F = M_a = R^2$, траекториями системы *F* являются прямые *у = с,* а системы *G*—параболы $y = c(1 + x^2)$ (см. рисунок); множества *Sf* и S_g совпадают с осью *ox.*

Легко видеть, что *Sf* и S_g будут топологически эквивалентными в смысле определений [1 — 3] (соответствующий гомеоморфизм производит сжатие к оси *ox* на каждой из прямых $x = x_0$), хотя S_f — устойчивое, *з* S_g — неустойчивое по Ляпунову множества (ниже будет показано, что эти множества будут ТТИ-различными).

Т е о р е м а 1. *Устойчивое S_f и неустойчивое S_g по Ляпунову инвариантные множества систем F и G соответственно являются ТМ-различными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что S_f и S_g *ТМ*-эквивалентны и ф — соответствующий S_f-гомеоморфизм. Пусть *U (Sf)*— его область определения. Выберем е > 0 так, чтобы *$U_E(S_g)$ cz q>(U(Sf)).* В силу неустойчивости множества S_g для любого б > 0 найдется точка Ut>{Sg) такая, что *g(p)* |-| $r_e(S_g)$=^= о. Пусть ё i > о таково, что *U_{El}(Sf)cz cz $(p\sim^{l}(U_E(Sg))$.* Поскольку множество S_f устойчиво, то по заданному e_4>0 можно указать S_t > 0 такое, что для любой точки *q* £ t/g, (S_f) имеем *f(q)* |~| П $Г_e$, (5,) = 0. Если взять б > 0 так, чтобы $ф^{-1}$ *$(U_6(S_g))$ cz U_{6l} (S_f),* то можно указать точку *p£U(,{S_g)* такую, что *g(p)* f] *$T_e(S_g)$=/= 0.* Но тогда тем более / ($ф^{-1}$ *(p))* П $Г_{Ei}$ (Sy) *Ф* 0, что противоречит устойчивости множества S_f.

Эта теорема показывает, что классификация инвариантных множеств, основанная на понятии ГМ-эквивалентности (ГМ-классификация), должна быть различной для устойчивых и неустойчивых множеств.

Приведем еще некоторые необходимые определения и утверждения.

Определение 4. Последовательность (p_n)(V"€N) называется конфинальной (ср. [8, с. 107]) множеству S cz *M_F,* если существует равный нулю lim *$p(p_n, S)$.*
*П-** ∞

Если же ни одна подпоследовательность' последовательности $(p_п)$ (уге £ € N) [рп 6 М-*f*] не является конфинальной множеству S cz *M_F,* то последовательность (p_n) называется строго неконфинальной множеству *S.*

Теорема 2. *Если существует точка p£MF\S_f такая, что из множества f(p) можно выделить последовательность, конфинальную множеству S_f, то Sf — неустойчивое множество.*

Доказательство. Очевидно, по последовательности *(p_n)* можно указать последовательность (t_n) такую, что *$p_n = f(t_n, p)$,* причем $|/_n|$-»--foo при я-»--|-оо; в противном случае траектория, начавшаяся вне инвариантного множества S_f, достигала бы его за конечное время. Так как *(p_n)* конфинальна S_f, то для любого б > 0 можно указать *N* £ N такое, что для всех *n> N p_n£U_6{S_f).* Выберем *г = p(p, S_f).* Тогда *f (p_n)* f] *$T_R(S_f)$^ Ф0,* хотя р *(p_n, S_f)<С.* б, что и доказывает в силу произвольности б > 0 неустойчивость множества *S_f.*

Следствие. *Пусть S_f — устойчивое инвариантное множество системы F. Тогда (у р £ (M_F \ S_f)) [f (p j* fl *S~$_f$ = 0].*

Для множества *S_f* мыслимы следующие три возможности:

1) Множество *S_f* обладает окрестностью *$U_R(S_f)$,* замыкание *$U_e(S_f)$* которой компактно в ***Mf-***

к 2) Само множество Sf компактно в Мр, однако для любого s > 0 множество *$U_t(S_f)$* некомпактно в ***Mf-***

3) Множестно *S_f* некомпактно в ***Mf.***

Теорема 3. *Инвариантные замкнутые множества типа 1) — 3)ТМ-различны между собой. Иными словами, если инвариантное замкнутое множество Sf системы F ТМ-эквивалентно замкнутому инвариантному множеству S_g системы G, то S_g относится к тому же типу 1) — 3), что и S_f.*

Доказательство этого утверждения вытекает из свойств гомеоморфных отображений.

Лемма 3. *Пусть последовательность* (p_n) (yn£N) *является конфинальной множеству S_f, а* <р — S$_c$*гомеоморфизм. Тогда последовательность точек (**ф** (pn)) конфинальна множеству* **ф** *(Sf).*

Доказательство. Выберем произвольную последовательность (е„) | 0. Поскольку ф является *S_f*гомеоморфизмом, то для каждого N можно указать е* > 0 такое, что *U_{e_n} * (S_f) cz* ф$^{-1}$ *$(U_h$* (ф(5/))). Так как последовательность (p_n) конфинальна S_f, то множеству *U_n * (S_f)* принадлежат все точки этой последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа, т. е. lim р(ф($p_п$), ф(5^)) = 0, что и требовалось
*П-*oo*

доказать.

Лемма 4. *Пусть последовательность* (p_n) (yn£N) *[p_n* £ {***Mf*** \ Sf)] *является строго неконфинальной множеству S_f, а* ф — *Sf-гомеоморфизм. Тогда последовательность* (ф (/?„)) *строго неконфинальна множеству* q(S_f).

Доказательство. Предположим от противного, что (ф($p_п$)) не является строго неконфинальной множеству ф *(Sf).* Это означает, что некоторая ее подпоследовательность (ф (pn_h)) является конфинальной множеству ф*(S_f).* Применяя предыдущую лемму к последовательности *q,,$_k$, Цп$_к$ —* — *<p$(p_n$*), множеству 5$_г$ = ф(5у) и Sg-гомеоморфизму ф$^{-1}$, видим, что по-

следовательность точек $p_{n_k} = \varphi^{-1}(q_{n_k})$ конфинальна множеству $S_f = \varphi^{-1}(S_g)$, чего быть не может.

§ 2. ТМ-КЛАССИФИКАЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ ПО ЛЯПУНОВУ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ

Если S_f — устойчивое инвариантное множество, а S_g — инвариантное ему TM-эквивалентное множество, то по теореме 1 S_g также является устойчивым, а тогда по следствию теоремы 2 $(\forall p \in (M_F \setminus S_f)) [\overline{f(p)} \cap S_f = \varnothing]$ и $(\forall p \in (M_G \setminus S_g))$, $[\overline{g(p)} \cap S_g = \varnothing]$.

По отношению к траекториям из некоторой окрестности инвариантного множества S_f могут представиться следующие возможности:

1. $f(p) = p$.
2. $f(p) \neq p$, но $\overline{f(p)} = f(p)$.
3. $\overline{f(p)} \neq f(p)$, но $\overline{f(p)}$ — минимальное множество.
4. $\overline{f(p)}$ не является минимальным множеством.

Теорема 4. *Пусть устойчивое замкнутое инвариантное множество S_f системы F TM-эквивалентно инвариантному множеству S_g системы G и $\varphi: U(S_f) \to M_G$ соответствующий S_f гомеоморфизм. Тогда для каждой точки $p \in U(S_f)$ такой, что $\overline{f(p)} \subset U(S_f)$, имеют место следующие утверждения:*

1. Если $f(p) = p$, то и $g(\varphi(p)) = \varphi(p)$.

2. Если $f(p) \neq p$, но $\overline{f(p)} = f(p)$, то и $g(\varphi(p)) \neq \varphi(p)$, но $\overline{g(\varphi(p))} = g(\varphi(p))$.

3. Если $\overline{f(p)} \neq f(p)$, но $\overline{f(p)}$ — минимальное множество, то и $\overline{g(\varphi(p))} \neq g(\varphi(p))$, но $\overline{g(\varphi(p))}$ — минимальное множество.

4. Если $\overline{f(p)}$ не является минимальным множеством, то и $\overline{g(\varphi(p))}$ не является минимальным множеством.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из того, что гомеоморфным образом точки может быть только точка.

Пусть теперь $\overline{f(p)} = f(p)$. Это означает, что $f(p)$ — замкнутое множество. Но тогда его гомеоморфный образ $g(\varphi(p)) = \varphi(f(p))$ — тоже замкнутое множество, и поэтому $\overline{g(\varphi(p))} = g(\varphi(p))$. Второе утверждение тоже доказано.

Предположим теперь, что $\overline{f(p)} \setminus f(p) \neq \varnothing$. и $\overline{f(p)}$ — минимальное множество, но $\overline{g(\varphi(p))}$ не является минимальным (случай, когда $\overline{g(\varphi(p))} = g(\varphi(p))$, невозможен в силу симметричности отношения TM-эквивалентности и доказанного выше утверждения). Это означает, что существует точка $\eta_0 \in \overline{g(\varphi(p))}$ такая, что $\overline{g(\eta_0)} \subset \overline{g(\varphi(p))}$ и $\overline{g(\varphi(p))} \setminus \overline{g(\eta_0)} \neq \varnothing$. Но тогда $\overline{f(\varphi^{-1}(\eta_0))} \subset \overline{f(p)}$ и $\overline{f(p)} \setminus \overline{f(\varphi^{-1}(\eta_0))} \neq \varnothing$, что противоречит минимальности $\overline{f(p)}$. Тем самым доказано третье утверждение теоремы.

Доказательство четвертого утверждения очевидно.

Доказанная теорема позволяет с учетом теоремы 3 выделить 15 TM-различных типов устойчивых инвариантных множеств для каждого из указанных ранее трех типов:

а) четыре класса инвариантных множеств, некоторая окрестность которых заполнена траекториями одного из указанных типов;

б) шесть классов инвариантных множеств, некоторая окрестность которых содержит траектории двух из четырех указанных типов, причем траектории каждого из этих типов имеются в любой сколь угодно малой окрестности инвариантного множества;

в) четыре класса инвариантных множеств, некоторая окрестность которых содержит траектории трех из четырех указанных типов, причем траектории каждого из этих типов имеются в любой сколь угодно малой окрестности инвариантного множества;

г) один класс инвариантных множеств, в любой сколь угодно малой окрестности которых имеются траектории всех четырех типов.

Инвариантные множества S_f такие, что $(\exists\varepsilon>0)(\forall p\in U_\varepsilon(S_f))\,[f(p)\neq\neq p \wedge \overline{f(p)}=f(p)]$, называют обычно центром, множества S_f такие, что $(\forall\varepsilon>0)(\exists p\in U_\varepsilon(S_f))$ ($\overline{f(p)}$ не является минимальным множеством) — центрофокусом. Инвариантные множества S_f такие, что $(\exists\varepsilon>0)(\forall p\in U_\varepsilon(S_f))$ ($\overline{f(p)}$ — минимальное множество) назовем квазицентром.

Данная статья не ставит целью решение вопроса о непустоте тех или иных выделенных классов. Отметим только, что если инвариантное множество S_f обладает окрестностью, замыкание которой — компакт, то в любой окрестности $U(S_f)$ инвариантного множества S_f найдется точка p такая, что $\overline{f(p)}$ — минимальное множество [7, с. 401]. Это означает, что для указанных типов множеств по крайней мере один из выделенных классов пуст.

§ 3. *ТМ*-КЛАССИФИКАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПО ЛЯПУНОВУ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ

Поведение траекторий, расположенных в окрестности неустойчивого множества S_f, может быть значительно более сложным, чем в случае устойчивого множества, и поэтому здесь возникает более сложная классификация.

Определение 5. Неустойчивое замкнутое инвариантное множество динамической системы F называется регулярным, если существует $\varepsilon>0$ такое, что $(\forall p\in U_\varepsilon(S_f))\ [f(p)\cap\Gamma_\varepsilon(S_f)\neq\varnothing]$.

Иными словами, инвариантное множество называется регулярным, если существует его ε-окрестность, не содержащая целых траекторий.

Множество, не являющееся регулярным, называется нерегулярным.

Теорема 5. *Пусть инвариантные множества S_f и S_g систем F и G являются ТМ-эквивалентными. Тогда, для того чтобы множество S_f было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы таковым было множество S_g.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о *ТМ*-различии устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств.

Следствие. *Регулярные и нерегулярные множества являются ТМ-различными.*

Поскольку всюду в этом параграфе речь будет идти только о неустойчивых инвариантных множествах, то слово «неустойчивое» будем опускать.

Очевидно, что относительно траектории $f(p)$, расположенной в некоторой окрестности инвариантного множества S_f, можно сделать следующие попарно исключающие друг друга предположения:

Iω. Все последовательности $(f(t_n,\ p))$, $(t_n)\uparrow+\infty$ являются конфинальными множеству S_f.

IIω. Все последовательности $(f(t_n,\ p))$, $(t_n)\uparrow+\infty$ являются строго неконфинальными множеству S_f.

IIIω. Существует хотя бы одна последовательность $(f(t_n,\ p))$, $(t_n)\uparrow+\infty$, конфинальная множеству S_f, и хотя бы одна последовательность $(f(t_n^*,\ p))$, $(t_n^*)\uparrow+\infty$, строго неконфинальная множеству S_f.

Аналогично определяются ситуации Iα — IIIα, только в этом случае речь идет о последовательностях $(t_n)\downarrow-\infty$.

Замечание. Если замкнутое множество S_f обладает ε-окрестностью, замыкание которой — компакт, то эти условия означают следующее:

$\mathrm{I}\omega - \Omega_p \subset S_f$; $\mathrm{II}\omega - \Omega_p \cap S_f = \varnothing$; $\mathrm{III}\omega - \Omega_p \cap S_f \neq \varnothing \wedge \Omega_p \not\subset S_f$; $\mathrm{I}\alpha - A_p \subset S_f$; $\mathrm{II}\alpha - A_p \cap S_f = \varnothing$; $\mathrm{III}\alpha - A_p \cap S_f \neq \varnothing \wedge A_p \not\subset S_f$.

Комбинирование указанных возможностей позволяет получить следующие девять типов траекторий:

1) $\mathrm{I}\omega - \mathrm{I}\alpha$; 2) $\mathrm{I}\omega - \mathrm{II}\alpha$; 3) $\mathrm{I}\omega - \mathrm{III}\alpha$; 4) $\mathrm{II}\omega - \mathrm{I}\alpha$; 5) $\mathrm{II}\omega - \mathrm{II}\alpha$; 6) $\mathrm{II}\omega - \mathrm{III}\alpha$; 7) $\mathrm{III}\omega - \mathrm{I}\alpha$; 8) $\mathrm{III}\omega - \mathrm{II}\alpha$; 9) $\mathrm{III}\omega - \mathrm{III}\alpha$.

Траектории типа $\mathrm{I}\omega - \mathrm{I}\alpha$ будем называть эллиптическими траекториями (E-траекториями), типа $\mathrm{I}\omega - \mathrm{II}\alpha$ — положительно параболическими (P^+-траекториями), $\mathrm{II}\omega - \mathrm{I}\alpha$ — отрицательно параболическими (P^--траекториями); P^+-траектории и P^--траектории объединяются в класс параболических траекторий (P-траекторий). Траектории типа $\mathrm{II}\omega - \mathrm{II}\alpha$ будем называть гиперболическими (H-траекториями), типа E, P, H будем называть ординарными.

Траектории типа $\mathrm{I}\omega - \mathrm{III}\alpha$ назовем положительно конвергентными отрицательно неординарными (K^+N^--траекториями), $\mathrm{II}\omega - \mathrm{III}\alpha$ — положительно уходящими отрицательно неординарными (U^+N^--траекториями), $\mathrm{III}\omega - \mathrm{I}\alpha$ — положительно неординарными отрицательно конвергентными (N^+K^--траекториями), $\mathrm{III}\omega - \mathrm{II}\alpha$ — положительно неординарными отрицательно уходящими (N^+U^--траекториями), $\mathrm{III}\omega - \mathrm{III}\alpha$ — двояко неординарными (DN-траекториями).

Траектории типа K^+N^- и N^+K^- назовем конвергентно неординарными (KN-траекториями), типа U^+N^- и N^+U^- — уходяще неординарными (UN-траекториями).

Аналогичные термины будут употребляться и для точек, порождающих соответствующие траектории.

Замечание. Поскольку отношение «лежать между» является инвариантом TM-преобразований, то из принадлежности точек $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ одной из полутраекторий $f(p)$ вытекает принадлежность точек $\varphi(p_1), \varphi(p_2), \ldots, \varphi(p_n), \ldots$ одной из полутраекторий траектории $g(\varphi(p))$. Но при этом возрастанию параметра на траектории $f(p)$ не обязательно соответствует возрастание параметра на ее образе.

Из этого замечания, а также лемм 3, 4 вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 6. *Пусть инвариантное множество S_f системы F TM-эквивалентно инвариантному множеству S_g системы G и $\varphi: U(S_f) \to M_G$ — соответствующий S_f-гомеоморфизм. Тогда:*

1. Если $p \in U(S_f)$ — E-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — E-точка множества S_g.

2. Если $p \in U(S_f)$ — H-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — H-точка множества S_g.

3. Если $p \in U(S_f)$ — P-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — P-точка множества S_g.

4. Если $p \in U(S_f)$ — KN-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — KN-точка множества S_g.

5. Если $p \in U(S_f)$ — UN-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — UN-точка множества S_g.

6. Если $p \in U(S_f)$ — DN-точка множества S_f, то и $\varphi(p)$ — DN-точка множества S_g.

Определение 6. Инвариантное неустойчивое множество S_f системы F называется правильным, если $(\forall p \in (M_F \setminus S_f))$ (p — либо E-точка, либо H-точка, либо P-точка множества S_f); в противном случае множество S_f называется неправильным.

Следствие теоремы 6. *Правильные и неправильные множества ТМ-различны.*

Поскольку полное описание всех возникающих при такой классификации различных типов инвариантных множеств становится громоздким, то в качестве примера рассмотрим классификацию правильных регулярных множеств. Очевидно, логически возможно существование следующих ТМ-различных классов.

1. Эллиптические множества: существует такая D-оарестность множества S_f, что все ее точки — £-точки множества S_f.

2. Параболические множества: существует такая D-окрестность множества S_f, что все ее точки — Р-точки множества S_f.

3. Гиперболические множества: существует такая D-окрестность множества *Sf,* что все ее точки — Я-точки множества S_f.

4. Эллиптико-параболические множества: в любой D-окрестности множества Sf имеются £-точки и Р-точки, но существует D-окрестность множества Sf, не содержащая Я-точек этого множества.

5. Эллиптико-гиперболические множества: в любой D-окрестности множества Sf имеются £-точки и Я-точки, но существует D-окрестность множества Sf, не содержащая Р-точек этого множества.

6. Гиперболо-параболические множества: в любой D-окрестности множества Sf имеются Я-точки и Р-точки, но существует D-окрестность множества S_f, не содержащая £-точек этого множества.

7. Эллиптико-гиперболо-параболические множества: в любой D-окрестности множества S_f имеются £-точки, Я-точки и Р-точки этого множества.

Если учесть теперь теорему 3, то получаем 21 тип ТМ-различных правильных регулярных инвариантных множеств.

Отметим, что некоторые из выделенных типов множеств могут быть пустыми (например, тип гиперболических множеств S_f, обладающих окрестностью $U_z(S_f)$, такой, что $U_t(S_f)$ —компакт [9]), но, как указывалось ранее, настоящая статья не ставит своей целью исследование вопросов непустоты выделенных классов.

Литература

1. Челышева Л. А. Топологическая классификация замкнутых инвариантных, множеств /Математические исследования.—Кишинев: РИО АН МССР, 1968, т. 3,-i с. 184—187.

2. Челышева Л. А. Топологические свойства инвариантных множеств динамических систем.— Дис. ...канд. физ.-мат. наук.—Кишинев, 1968.— 98 с.

3. Рейзинь Л. Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений,— Рига: Зинатне, 1971,—235 с.

4. Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве.— Мат. сб., 1962, т. 56 (98), с. 77—94.

5. Немыцкий В. В. Топологическая классификация особых точек и обобщенные функции Ляпунова.— Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 3, с. 359—370.

6. Рейзинь А. И., Рейзинь Л. Э. Топологическая классификация линейных систем дифференциальных уравнений.— Латв. мат. ежегод., 1966, вып. 2, с. 261—264.

7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.—545 с.

8. Шилов Е. Г. Математический анализ/ Функции одного переменного, ч. 1 и 2,—М.: Наука, 1969,—528 с.

9. Ладис Н. Н. О множествах двухстороннего притяжения.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 2, с. 365—367.

Могилевский машиностроительный институт

Поступила в редакцию
15 декабря 1978 г.