# ДОКЛАДЫ
## АКАДЕМИИ НАУК БССР

АВТОРСКИЙ ОТТИСК

25-Й ГОД ИЗДАНИЯ
Том XXV, № 5

1981

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{k_{ji}A_i(w_0)}{w_0^{(n-j)}}\,y^{(n-j+1)}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{k_{ji}A_i(w_0)\,w_0^{(n-j+1)}}{(w_0^{(n-j)})^2}\,y^{(n-j)},$$

где $w_0=\alpha(z-z_0)^{-s}$.

Уравнение (9) можно переписать так:

$$y^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{m}A_i(w_0)\sum_{j=1}^{n}k_{ji}\left(\frac{y^{(n-j)}}{w_0^{(n-j)}}\sum_{l=1}^{n}\frac{k_{li}w_0^{(n-l+1)}}{w_0^{(n-l)}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y^{(n-j)}}{w_0^{(n-j)}}\right)'\right). \tag{10}$$

Так как

$$\frac{w_0^{(n-l+1)}}{w_0^{(n-l)}}=-(s+n-l)(z-z_0)^{-1},$$

то

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{k_{li}w_0^{(n-l+1)}}{w_0^{(n-l)}}=-(z-z_0)^{-1}\sum_{l=1}^{n}(s+n-l)\,k_{li}=$$

$$=-(z-z_0)^{-1}(\mu_i s+\nu_i)=-(n+s)(z-z_0)^{-1}.$$

При $y=\alpha(z-z_0)^n$ получим

$$-(n+s)(z-z_0)^{-1}\,\frac{y^{(n-j)}}{w_0^{(n-j)}}+\left(\frac{y^{(n-j)}}{w_0^{(n-j)}}\right)'=$$

$$=-\frac{(n+s)\,n(n-1)\,\ldots\,(j+1)}{(-1)^{n-j}\,s(s+1)\,\ldots\,(s+n-j-1)}(z-z_0)^{s+n-1}+$$

$$+\frac{n(n-1)\,\ldots\,(j+1)\,((z-z_0)^{s+n})'}{(-1)^{n-j}\,s(s+1)\,\ldots\,(s+n-j-1)}\equiv 0.$$

Таким образом, функция $y=\alpha(z-z_0)^n$ есть решение уравнения (10). Это означает, что характеристическое уравнение для (10) имеет корнем число $\rho=n$.


## Summary

A property due to the presence of the root $\rho=n-1$ in the appropriate characteristic equations is found for simplified differential equations of the $n$th order.


## Литература


[1] Мартынов И. П. ДУ, 1973, т. 9, № 10, с. 1780—1791.



*Гродненский государственный университет* *Поступило 23.10.80*

Доклады Академии наук БССР
1981 Том XXV № 5

УДК 517.925.31

И. Г. ПЕТРОВСКАЯ

# КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)*

Пусть $M$ — метрическое пространство; $F$ — динамическая система на нем и $f(t, p)$ — ее движение, порожденное точкой $p \in M$; $S$ — замкнутое инвариантное множество системы $F$.

Сферической $\varepsilon$-окрестностью $\Sigma_\varepsilon(p)$ точки $p \in M \setminus S$ относительно множества $S$ назовем множество

$$\Sigma_\varepsilon(p) = \{q \in M \setminus S / \rho(q, S) = \rho(p, S) \wedge \rho(q, p) \leqslant \varepsilon\}.$$

Обозначим $\alpha(p) = \operatorname{Lim}\limits_{\varepsilon \to 0} \bigcap\limits_{t \leqslant 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau \leqslant t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))}$ — смежное $\alpha$-предельное множество точки $p \in M \setminus S$ [1,2].

Теорема 1. *Пусть $S$ таково, что для некоторого числа $r_0 > 0$ множество $U_{r_0}(S) = \{q \in M / \rho(q, S) \leqslant r_0\}$ — компакт. Тогда для неустойчивости множества $S$ необходимо и достаточно существования точки $p \in M \setminus S$ такой, что $\alpha(p) \cap S \neq \varnothing$.*

Доказательство. Необходимость. Если $S$ — неустойчивое множество, то существует $r \leqslant r_0$ такое, что $U_r(S)$ — компакт, и каково бы ни было натуральное число $k$, найдутся точка $\xi_k$, $\rho(\xi_k, S) = 1/k$ и момент $t_k$ такие, что $\rho(f(t_k, \xi_k), S) = r$. Последовательность $(f(t_k, \xi_k))$ расположена на компакте и поэтому имеет хотя бы одну предельную точку. Очевидно, можно считать, что сама $(f(t_k, \xi_k))$ является сходящейся, и пусть $p = \lim\limits_{k \to \infty} f(t_k, \xi_k)$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ $f(t_k, \xi_k) \in \Sigma_\varepsilon(p)$ для всех достаточно больших $k$ и поэтому

$$f(-t_k, \Sigma_\varepsilon(p)) \ni f(-t_k, f(t_k, \xi_k)) = \xi_k.$$

В силу выбора точек $\xi_k$ для каждой из них найдется точка $q_k \in S$ такая, что $\rho(\xi_k, q_k) < 2/k$. Поскольку $S$ — компакт, то можно считать, что существует $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = q \in S$. Тогда, очевидно, $q = \lim\limits_{k \to \infty} \xi_k$ и $(t_k) \uparrow +\infty$. Поэтому при любом $t \leqslant 0$

$$\overline{\bigcup_{\tau \leqslant t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))} \ni \lim_{k \to \infty} \xi_k = q.$$

Но тогда

$$\bigcap_{t \leqslant 0} \overline{\bigcup_{\tau \leqslant t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))} \ni q \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \bigcap_{t \leqslant 0} \overline{\bigcup_{\tau \leqslant t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))} \ni q,$$

т. е. $\alpha(p) \cap S \neq \varnothing$.

Достаточность доказывается так же, как в [1].

Пусть $d$ — непрерывная функция $d: ]0, +\infty[ \to R$, возрастающая и такая, что $\lim_{r\to+0} d(r) = -\infty$. Определим смежное $d$-число по формуле

$$(\Omega)^- d_{\Sigma(p)} = \inf_{\varepsilon>0} \overline{\lim_{t\to-\infty}} \sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)} \left\{ -\frac{1}{t} d(\rho(f(-t, \xi), S)) \right\}.$$

Введенное число относится к типу обобщенных показателей Ю. С. Богданова ([2,3]).

Теорема 2. *Пусть $S$ таково, что для некоторого числа $r_0 > 0$ множество $U_{r_0}(S)$ — компакт. Тогда для неустойчивости множества $S$ необходимо и достаточно существования функции $d$ (с указанными ранее свойствами) и точки $p \in M \setminus S$ таких, что $(\Omega)^- d_{\Sigma(p)} > 0$.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 1 существует точка $p \in M \setminus S$ такая, что $\alpha(p) \cap S \neq \varnothing$. Обозначим $\delta_m = \dfrac{\rho(p, S)}{m}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $m \in N$ можно указать $t_m > 0$ и $\xi_m \in \Sigma_\varepsilon(p)$ такие, что $\rho(f(-t_m, \xi_m), S) = \delta_m$, причем $t_{m+1} - t_m \geqslant 1$. Кроме того, будем считать, что $t_1 = 0$. Определим $d(r)$ следующим образом: $d(r) = r - \delta_1$, если $r > \delta_1$,

$$d(r) = \frac{t_m(\delta_{m+1} - r) + t_{m+1}(r - \delta_m)}{\delta_m - \delta_{m+1}},$$

если $\delta_{m+1} < r < \delta_m$.

Тогда

$$\frac{1}{t_m} d(\rho(f(-t_m, \xi_m), S)) = \frac{1}{t_m} d(\delta_m) = -1$$

и поэтому

$$\sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)} \left\{ -\frac{1}{t_m} d(\rho(f(-t_m, \xi), S)) \right\} \geqslant 1.$$

Это означает, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)} \left\{ -\frac{1}{t} d(\rho(f(-t, \xi), S)) \right\} \geqslant 1,$$

т. е. $(\Omega)^- d_{\Sigma(p)} \geqslant 1 > 0$.

Достаточность. Пусть $(\Omega)^- d_{\Sigma(p)} = \gamma > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)} \left\{ -\frac{1}{t} d(\rho(f(-t, \xi), S)) \right\} \geqslant \gamma.$$

Это означает существование $\xi^* \in \Sigma_\varepsilon(p)$ и сколь угодно большого $t^*$ таких, что

$$-\frac{1}{t^*} d(\rho(f(-t^*, \xi^*), S)) \geqslant \frac{1}{2}\gamma > 0$$

или

$$d(\rho(f(-t^*, \xi^*), S)) \leqslant -\frac{t^*}{2}\gamma.$$

Зафиксировав $\delta > 0$, выберем $t^*$ так, чтобы $-\dfrac{t^*\gamma}{2} < d(\delta)$. Тогда $\rho(f(-t^*, \xi^*), S) \leqslant \delta$, т. е. для любого $\delta > 0$ существует точка $q = f(-t^*, \xi^*)$ такая, что $\rho(q, S) < \delta$ и $\sup_{t\in R} f(t, q) \geqslant \rho(p, S)$, что и доказывает неустойчивость $S$.

## Summary

The instability criterion of a closed invariant set of the dynamic system with a compact vicinity is given in terms of *tid*, the Yu. S. Bogdanov numbers.

## Литература

[1] Б о г д а н о в а М. Ю. ДУ, 1980, т. 16, № 2, с. 195—200. [2] Богданов Ю. С. ДАН СССР, 1964, т. 158, № 1, с. 9—12. [3] Б о г д а н о в Ю. С. ДУ, 1965, т. 1, № 9, с. 1140-1148. '

*Могилевский машиностроительный институт* *Поступило 15.10.80*