БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

ПЕТРОВСКАЯ Ирина Георгиевна

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1981

Работа выполнена на кафедре высшей математики Могилевского машиностроительного института

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Богданов Ю.С.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Рейзинь Л.Э, (АН Латвийской ССР), кандидат физико-математических наук, доцент Мироненко В,И. (Гомельский госуниверситет].

Ведущее высшее учебное заведение - Ленинградский государственный университет имени А.А. Жданова.

Защита состоится "_____"____________________198 года в 10 часов на заседании специализированного совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им, В.И.Ленина /220080, г. Минск-80, университетский городок, главный корпус, комната 206/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина.

Автореферат разослан "_____"____________________198 года.

Ученый секретарь совета
профессор И.А.Прусов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из основных подходов к решению широкого круга разнообразных математических задач является метод факторизации - выделение классов эквивалентности по отношению к некоторому свойству и изучение простейшего из представителей данного класса эквивалентности. Реализация этого подхода в теории обыкновенных дифференциальных уравнений привела к введению ряда понятий эквивалентности систем дифференциальных уравнений динамических систем) или инвариантных множеств (и, в частности, точек покоя) таких систем - динамической, топологической, гомотопической, континуальной и т.д.

Значительно повысившийся в последние годы интерес к некомпактным инвариантным множествам сделал весьма актуальной задачу построения аналогичной классификации замкнутых, вообще говоря, некомпактных множеств систем дифференциальных уравнений (динамических систем) .

Диссертационная работа выполнена в рамках Республиканской комплексной программы "Дифференциал 01" "Исследование аналитических, качественных и асимптотических свойств решений систем дифференциальных уравнений" регистрационный номер 76.048,424 Плана важнейших научно-исследовательских работ в области естественных и общественных наук по Белорусской ССР, утвержденного постановлением Президиума АН БССР от 6 декабря 1979 года № 194.

Цель работы. Построение классификации замкнутых инвариантных множеств динамических систем по свойствам траекторий, расположенных в некоторой их окрестности, и некоторых признаков принадлежности инвариантного множества одному из выделенных классов.

Научная новизна и практическая ценность. Научная новизна работы состоит в следующем:

а) введено понятие ТМ-эквивалентности замкнутых инвариантных динамических систем;

б) доказано ТМ-различие устойчивых и неустойчивых по Ляпунову замкнутых инвариантных множеств динамических систем и построена классификация устойчивых и неустойчивых по Ляпунову инвариантных множеств;

в) построены критерии устойчивости л неустойчивости по Ляпунову замкнутых инвариантных множеств динамических систем как в терминах свойств траекторий, расположенных в некоторой окрестности этих множеств, так и в терминах **cL** -чисел и -чисел;

г) в терминах функций с некоторыми специальными свойствами построены признаки принадлежности инвариантного множества одному из выделенных классов.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для исследования свойств замкнутых инвариантных множеств динамических систем.

<u>Методика исследований</u>. Для построения классификации замкнутых инвариантных множеств динамических систем вводится понятие ВЛ-эквивалентности, которое, в случае инвариантных множеств, обладающих окрестностью с компактным вамцканием, совпадает с одним из известных ранее понятий топологической эквивалентности. Выявив свойства траекторий динамической системы, являющиеся инвариантами данного отношения эквивалентности, относим к одному классу эквивалентности инвариантные множества динамических систем, все траектории из некоторой окрестности которых обладают данным набором инвариантов преобразования.

Отметим, что одним из важнейших инвариантов отношения ТМ-эквивалентности является свойство устойчивости по Ляпунову.

Построение критериев устойчивости и неустойчивости по Ляпунову замкнутых' инвариантных множеств динамических систем произво - дится на основе изучения асимптотических свойств решений, распо - ложенных в некоторой окрестности изучаемых множеств, а признаки принадлежности инвариантного множества одному из выделенных клас- сов - на основе изучения поведения траекторий системы ио отноше - нию к поверхностям уровня некоторых специальных функций.

На защиту выносятся следующие результаты:

I. Новая классификация устойчивых и неустойчивых по Ляпунову инвариантных множеств динамических систем.

2 Критерии устойчивости и неустойчивости замкнутых январи - ' .гшх множеств в терминах окрестных траекторий.

3. Признаки устойчивости в неустойчивости инвариантных мно- жеств в терминах обобщенных характеристичных чисел.

4. Решение щюблем различения для специальных динамических систем.

Апробация работы. По материалам диссертации сделаны доклады на IУ Всесоюзной конференции по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Рязань, 1976 г.), на Г убликан - ской конференции математиков Белоруссии (Гродно, 1980 г.;, ча се- минарах по обыкновенным дифференциальным уравнениям при БГУ ик. В.И.Ленина (руководитель - профессор Богданов Ю.С.), ЛетГУ им, П.Стучки (руководитель - профессор Рейзинь Л.Э.) в на Могилев- оком городском семинаре по дифференциальным уравнениям.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит аз введения я двух глав, содержащих вместе 6 параграфов. Работа изложена на 127 машинописных страницах. Библиография содержат 131 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введен?? дается краткий обзор работ по теме диссертация, поясняется сущность выбранного подхода к построению класойі/нации замкнутых инвариантных множеств и приводится краткое изложение основных результатов.

Первая глава диссертации посвящена вопросу ТМ-классификации инвариантных множеств динамических систем. В первом параграфе этой главы вводятся основные определения и доказываются некоторые вспомогательные утверждения.

Окрестность $\mathcal{U}(S)$ множества S называется $\mathcal{D}$-окрестностью, если $(\exists\, \varepsilon>0)\ [\mathcal{U}_\varepsilon(S)\subset\mathcal{U}(S)]$.

Гомеоморфизм $\varphi: \mathcal{U}(S)\to M_1$ некоторой окрестности $\mathcal{U}(S)$ множества S в метрическое пространство M_1 называется S-гомеоморфизмом, если:

а) $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{U}(S)$ $\mathcal{D}$-окрестность множества S ;

б) каковы бы ни были $\mathcal{U}_1(S)\subset\mathcal{U}(S)$ и $\mathcal{U}_2(\varphi(S))\subset\varphi(\mathcal{U}(S))$ - $\mathcal{D}$ -окрестности множеств S и $\varphi(S)$ соответственно, множества $\varphi(\mathcal{U}_1(S))$ и $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_2(\varphi(S)))$ суть $\mathcal{D}$-окрестности множеств $\varphi(S)$ и S соответственно.

Доказаны следующие утверждения:

1. Если S - компактное множество, то любая его окрестность является $\mathcal{D}$-окрестностью.

2. Если S - компактное множество, то любой гомеоморфизм $\varphi:\mathcal{U}(S)\to M_1$ ($\mathcal{U}(S)$ - окрестность множества S) является S-гомеоморфизмом.

3. Если φ - S-гомеоморфизм, то φ^{-1} - $\varphi(S)$-гомеоморфизм.

Инвариантные множества S_f и S_g динамических систем F и G называются ТМ-эквивалентными, если существует S_f-гомеоморфизм $\varphi:\mathcal{U}(S_f)\to M_G$ ($\mathcal{U}(S_f)$- $\mathcal{D}$-окрестность множества S_f) такой, что

1. $\varphi(S_f)=S_g$;

2. $(\forall p\in(\mathcal{U}(S_f)\setminus S_f))\ [\varphi(f(p)\cap\mathcal{U}(S_f))=g(\varphi(p))\cap\varphi(\mathcal{U}(S_f))]$.

Инвариантные множества S_f и S_g, не являющиеся ТМ-эквивалентными, будем называть ТМ-различными.

Доказано, что устойчивое S_f и неустойчивое S_g инвариантные множества систем F и G соответственно ТМ-различны.

Если множество S не является компактом, то $\rho(f(t_n, p), S) \to 0$ при $n \to +\infty$ для некоторой последовательности $(t_n) \uparrow +\infty$ не только не влечет за собой $\Omega_p \cap S \neq \phi$, но и даже $\Omega_p \neq \phi$ (Ω_p - ω-предельное множество траектории $f(p)$). Поэтому для характеристики поведения траекторий из некоторой окрестности $U(S)$ инвариантного множества S вводится понятие конфинальной и строго неконфинальной последовательностей.

Последовательность $(p_n), (\forall n \in N) [p_n \in M \setminus S]$ называется конфинальной множеству S, если существует равный нулю $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(p_n, S)$

Если же ни одна подпоследовательность последовательности (p_n) не конфинальна множеству S, то последовательность (p_n) называется строго неконфинальной множеству S.

Доказаны утверждения:

4. Если (p_n) - конфинальна (строго неконфинальна) множеству S, а φ - S-гомеоморфизм, то последовательность $(\varphi(p))$ конфинальна (строго неконфинальна) множеству $\varphi(S)$.

Показано на примере, что требование S-гомеоморфности φ существенно для справедливости этого утверждения.

Далее строится ТМ-классификация устойчивых инвариантных множеств динамических систем.

Эта классификация основана на следующем утверждении: свойства траекторий

1. $f(p) = p$;
2. $f(p) \neq p$, но $\overline{f(p)} = f(p)$;
3. $\overline{f(p)} \neq f(p)$, но $\overline{f(p)}$ - минимальное множество;

4. $f(p)$ не является минимальным множеством

являются инвариантами отношения ТМ-эквивалентности.

На основании этого утверждения выделено 45 ТМ-различных между собой классов устойчивых инвариантных множеств и приводятся примеры, показывающие непустоту некоторых выделенных классов.

Затем приводится ТМ-классификация неустойчивых инвариантных множеств динамических систем.

Инвариантное множество S динамической системы F называется регулярным, если

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall p \in U_\varepsilon(S) \setminus S)\ [f(p) \cap \Gamma_\varepsilon(S) \neq \emptyset].$$

В противном случае множество S называется нерегулярным. Иными словами, в любой окрестности нерегулярного инвариантного множества расположены целые траектории.

Доказано утверждение о том, что регулярные и нерегулярные инвариантные множества ТМ-различны.

По отношению поведения траекторий при $t \to +\infty$ возможны три предположения:

Iω. Все последовательности $(f(t_n, p)), (t_n) \uparrow +\infty$ конфинальны множеству S

IIω. Все последовательности $(f(t_n, p)), (t_n) \uparrow +\infty$ строго неконфинальны множеству S.

IIIω. Существует хотя бы одна последовательность $(f(t_n^*, p))$, $(t_n^*) \uparrow +\infty$ при $n \to +\infty$, конфинальная множеству S, и хотя бы одна последовательность $(f(t_n^{**}, p))$, $(t_n^{**}) \uparrow +\infty$ при $n \to +\infty$, строго неконфинальная множеству S.

Доказано, что если множество S обладает окрестностью $U(S)$, замыкание $\overline{U(S)}$ которой - компакт, то эти условия эквивалентны соответственно:

$$\Omega_p \subset S;\quad \Omega_p \cap S = \emptyset;\quad \Omega_p \cap S \neq \emptyset \wedge \Omega_p \not\subset S.$$

Аналогичные понятия и утверждения имеют место и при $t \to -\infty$.

Это позволяет выделить траектории девяти типов:

$$\mathrm{I}\alpha-\mathrm{I}\omega,\ \mathrm{I}\alpha-\mathrm{II}\omega,\ \mathrm{I}\alpha-\mathrm{III}\omega,\ \mathrm{II}\alpha-\mathrm{I}\omega,\ \mathrm{II}\alpha-\mathrm{II}\omega,$$
$$\mathrm{II}\alpha-\mathrm{III}\omega,\ \mathrm{III}\alpha-\mathrm{I}\omega,\ \mathrm{III}\alpha-\mathrm{II}\omega,\ \mathrm{III}\alpha-\mathrm{III}\omega.$$

а из них шесть ТМ-различных видов траекторий (траекторий, не переходящих друг в друга при S-гомеоморфизмах) и провести классификацию инвариантных множеств динамических систем по типу траекторий, расположенных в некоторой их окрестности.

Вторая глава диссертации посвящена построению некоторых признаков принадлежности замкнутого инвариантного множества одному из выделенных ранее классов.

Смежным ω-предельным (α-предельным) множеством точки $p \in M \setminus S$ называется множество

$$\omega(p) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))}$$

$$\left(\alpha(p) = \operatorname*{Lim}_{\varepsilon \to 0} \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} f(\tau, \Sigma_\varepsilon(p))} \right)$$

где $\Sigma_\varepsilon(p) = \{ q \in M \setminus S / \rho(q, S) = \rho(p, S) \wedge \rho(p, q) < \varepsilon \}$.

Кроме того, положим $\Delta(p) = \omega(p) \cup \alpha(p)$.

Доказано утверждение о том, что для неустойчивости замкнутого инвариантного множества S , обладающего окрестностью $U(S)$ замыкание $\overline{U(S)}$ которой - компакт, необходимо и достаточно существование точки $p \in M \setminus S$ такой, что $\Delta(p) \cap S \neq \emptyset$.

Показано на примере, что это утверждение в части необходимости не имеет места для некомпактных множеств.

Далее, на основании одной теоремы В.И.Зубова строится еще один критерий неустойчивости инвариантного множества S , обладающего окрестностью с компактным замыканием. Он состоит в следующем: существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\varliminf_{t\to\infty} \inf_{p\in\Gamma_\varepsilon(S)} \rho(f(t,p),S)=0.$$

Показано на примере, что и это утверждение в части необходимости не имеет места в некомпактном случае.

Построен критерий неустойчивости инвариантного множества в общем случае: для неустойчивости замкнутого инвариантного множества S динамической системы F необходимо и достаточно существование числа $\varepsilon_0>0$, последовательности открытых множеств $\sigma_n\subset M\setminus S$, $\tau_n=\inf\limits_{p\in S}\sup\limits_{q\in\sigma_n}\rho(p,q)\to 0$ при $n\to\infty$ и последовательности промежутков $]\tau_n^*,\tau_n^{**}[$ таких, что $\rho(f(t,p),S)>\varepsilon_0$ для всех $p\in\sigma_n$, $t\in]\tau_n^*;\tau_n^{**}[$ причем, $\tau_n=\max\{|\tau_n^*|,|\tau_n^{**}|\}\to+\infty$ при $n\to\infty$.

Выведены признаки принадлежности инвариантного множества S классу правильных и классу регулярных множеств на основе понятия вполне нормальной функции.

На основе признаков неустойчивости и устойчивости инвариантных множеств динамических систем строятся признаки устойчивости и неустойчивости в терминах d-чисел и νd-чисел.

В частности, доказаны следующие утверждения:

I. Пусть замкнутое инвариантное множество S динамической системы F обладает окрестностью $U(S)$, замыкание которой $\overline{U(S)}$ - компакт. Тогда для неустойчивости S необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

а) существует функция $d:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ (с некоторыми специальными свойствами) и точка $p\in M\setminus S$ такие, что

$$(\Omega)d_{\Sigma(p)}=\max\{(\Omega)^-d_{\Sigma(p)},(\Omega)^+d_{\Sigma(p)}\}>0;$$

здесь

$$(\Omega)^-d_{\Sigma(p)}=\inf_{\varepsilon>0}\varlimsup_{t\to+\infty}\sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)}\left\{-\frac{1}{t}d(\rho(f(-t,\xi),S))\right\},$$

$$(\Omega)^{+}d_{\Sigma(p)} = \inf_{\varepsilon>0} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{\xi\in\Sigma_\varepsilon(p)} \left\{-\frac{1}{t} d(\rho(f(t,\xi), S))\right\};$$

б) существует функция $d:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ (с некоторыми специальными свойствами) такая, что

$$(\Omega)d(S) = \max\{(\Omega)^{-}d(S), (\Omega)^{+}d(S)\} > 0;$$

здесь

$$(\Omega)^{-}d(S) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{p\in\Gamma_\varepsilon(S)} \left\{-\frac{1}{t} d(\rho(f(-t,p), S))\right\},$$

$$(\Omega)^{+}d(S) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{p\in\Gamma_\varepsilon(S)} \left\{-\frac{1}{t} d(\rho(f(t,p), S))\right\}.$$

На основе этих теорем строятся в терминах d-чисел критерии устойчивости замкнутых инвариантных множеств.

Для некомпактного замкнутого инвариантного множества S доказан следующий необходимый признак неустойчивости: если S - неустойчивое инвариантное множество, то

$$\Omega v d(S) = \max\{\Omega^{-} v d(S), \Omega^{+} v d(S)\} \geq 0;$$

здесь

$$\Omega^{-} v d(S) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{t\to-\infty}} \sup_{p\in U_\varepsilon(S)} \left\{-\frac{1}{t} d[v(f(t,p)), v(p)]\right\},$$

$$\Omega^{+} v d(S) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{p\in U_\varepsilon(S)} \left\{\frac{1}{t} d[v(f(t,p)), v(p)]\right\},$$

а $v(p)$ и $d(\gamma_1, \gamma_2)$ - функции с некоторыми специальными свойствами.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Крошко (Петровская) И.Г. Выявление устойчивости периодических потоков с помощью обобщенных характеристичных чисел. - IУ Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений и изучению дифференциальных уравнений в педагогических институтах. Тез. докл. Рязанский гос. пед. институт, Рязань, 1971, с. 141-142.

2. Крошко (Петровская) И.Г. Выявление устойчивости периодических потоков с помощью обобщенных -характеристичных чисел. - Дифферент уравнения, 1971, т. 7, Ж 9, с. I70I-I703.

3. Крошко (Петровская) И.Г. О достаточных условиях устойчивости и неустойчивости в смысле В.И.Зубова инвариантных многообразий дифференциальных систем. - Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, * 8, с. I527-1529.

4. Крошко (Петровская! " и достаточны* ->виях устойчивости и неустойчивости в смысле В.И.Зубова инвариан. '«ногообразий дифференциальных систем. - IУ Всесоюзная конференц. качественной теории дифференциальных уравнений и изучению диффь^ адьных уравнений в педагогических институтах. Тез. докл. Рязанский гос. пед. институт, Рязань, 1976, с. 183.

5. Петровская И.Г. Критерий неустойчивости инвариантных множеств динамических систем. - У Республиканская конференция математиков Белоруссии. Тез. докл., ч. П, Гродн. гос. ун~т, Гродно, 1980, с. 65-66.

6. Петровская И.Г. ТМ-эквивалентность н классификация некомпактных инвариантных множеств динамических систем. - Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, * 2, с. 233-240.

7. Петровская И.Г. Критерий неустойчивости инвариантного множества динамической системы. - Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 5, с, 396-398.

* А0-00623, Подписано в печать 15.07.81. Объвн 0,8 п.ли, 0,5 уч.-изд, л. Заказ 2.50 Тираж 150 экз. Беопватно.

Отпечатано на ротапринте «МИ. 212005, Могилев, Ленина, 70.