ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МАРТ № 3 ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ТОМ XXII

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1986

И. Г. ПЕТРОВСКАЯ

К ВОПРОСУ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАМКНУТЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Настоящая работа ставит своей целью построение некоторых возможных вариантов признаков принадлежности замкнутых инвариантных множеств динамических систем одному из выделенных в [1] классов. Отметим, что близкие вопросы изучались Ю. В. Малышевым [2].

Введем следующие обозначения: M — метрическое пространство, $\rho(x, y)$ — его метрика, F — динамическая система на M, $f(t, p)$ — движение, а $f(p)$ — траектория этой системы [3, с. 346—350]. Пусть S — подмножество пространства M. Тогда $U(S)$ — его окрестность, $\Gamma(S)=\overline{U(S)}\setminus U(S)$. Если $v: U(S)\to\mathbf{R}$, то $E_v=v(U(S))$; для каждого $c\in E_v$ обозначим $v^{-1}(c)$ поверхность уровня функции v, т. е. $v^{-1}(c)=\{p\in M/v(p)=c\}$.

Определение 1. Непрерывная функция $v: U(S)\to\mathbf{R}$ называется вполне нормальной (относительно F), если: 1) область определения этой функции является D-окрестностью множества S [1]; 2) $v^{-1}(0)=S$; 3) какова бы ни была точка $p\in U(S)\setminus S$, множество $f(p)\cap(U(S)\setminus v^{-1}(v(p)))$ не равно пустому.

Последнее условие означает, что ни одна траектория динамической системы F не лежит целиком на поверхности уровня функции v.

Лемма. *Пусть замкнутое инвариантное множество S динамической системы F обладает окрестностью $U(S)$, замыкание которой — компакт, а v — вполне нормальная функция, определенная на $U(S)$. Тогда функция*

$$\gamma(c) = \sup_{\substack{p\in v^{-1}(c)\\ c\neq 0}} \rho(p, S)$$

стремится к нулю при стремлении c к нулю.

Доказательство. Пусть от противного $\gamma(c)$ не стремится к нулю при c, стремящемся к нулю. Тогда существует $\varepsilon>0$, такое, что, каково бы ни было $\delta_n>0$, найдется число $c_n\in E_v$, такое, что хотя $|c_n|<\delta_n$, но $|\gamma(c_n)|>\varepsilon$, т. е. $\sup\limits_{\substack{p\in v^{-1}(c_n)\\ c_n\neq 0}} \rho(p, S)>\varepsilon$. Это означает существование точек p_n, $(\forall n\in \mathbf{N})[p_n\in v^{-1}(c_n)]$, таких, что $\rho(p_n, S)>\frac{\varepsilon}{2}$. Последовательность (p_n) целиком расположена на компакте $\overline{U(S)}\setminus U_{\varepsilon/2}(S)$ (не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\overline{U(S)}$ — компакт; в противном случае можно рассматривать сужение функции v на множество $U(S)$, такое, что $\overline{U(S)}$ — компакт), и поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что ею является сама последовательность (p_n), и пусть $p=\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Так как $\rho(p_n, S)>\frac{\varepsilon}{2}$, то $\frac{\varepsilon}{2}<\rho(p_n, S)\leqslant\rho(p_n, p)+\rho(p, S)$, и поскольку $\rho(p_n, p)\to 0$ при $n\to\infty$, то и $\rho(p, S)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

С другой стороны, непрерывность функции v влечет за собой выполнение следующих равенств $v(p)=\lim\limits_{n\to\infty} v(p_n)=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$. Из них следует, что $p\in S$, а это противоречит неравенству $\rho(p, S)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Определение 2. Функция $v: U(S)\to\mathbf{R}$ называется равномерно непрерывной на $\Gamma(S)$, если $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall p\in U(S)\setminus S)$ $[\rho(p, S)<\delta\Rightarrow|v(p)|<\varepsilon]$.

Очевидно, что если множество S обладает окрестностью $U(S)$, замыкание которой — компакт, то всякая непрерывная функция $v: U(S)\to\mathbf{R}$ равномерно непрерывна на $\Gamma(S)$. В общем же случае равномерная непрерывность на $\Gamma(S)$ функции v не следует не только из ее непрерывности (что вполне естественно), но даже из ее вполне нормальности. Более того, даже дополнительное требование

$$\gamma(c) = \sup_{\substack{p\in v^{-1}(c)\\ c\neq 0}} \rho(p, S)\to 0$$

при $c\to 0$, наложенное на вполне нормальную функцию v, не обеспечивает ее равномерной непрерывности на $\Gamma(S)$. Прежде чем доказать это, сделаем следующее.

Замечание. Равномерная непрерывность функции v на $\Gamma(S)$ влечет за собой следующее: для любой последовательности (p_n), конфинальной множеству S [1], последовательность $(v(p_n))$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

Действительно, если это не так, то $(\exists\varepsilon>0)$ $(\forall N\in\mathbf{N})$ $(\exists n\in\mathbf{N})$ $[n>N\Rightarrow|v(p_n)|\geqslant\varepsilon]$. Поскольку $\rho(p_n, S)\to 0$ при $n\to\infty$, то для любого $\delta>0$ можно указать $N^*\in\mathbf{N}$, такое, что $(\forall n\in\mathbf{N})$ $[n>N^*\Rightarrow\rho(p_n, S)>\delta]$, а тогда по определению равномерной непрерывности р(р», S)'<;6=*- =^ | f{p„) | <е. Найдя соответствующее е>0, можно указать по нему ЛГ и б, а по б— и *N**, и тогда для некоторых *n~>* max{W, *N*}* будем иметь одновременно | а(рп) | >е и (рп) | <е, чего быть не может. ,

Построим теперь вполне нормальную функцию о, для которой, у (с) ->0 при с-^0, но тем не менее не равномерно непрерывную на *V(S).*

Пример. Пусть Af=R², S={(jc, *y) / y * s $, { x , y)-+y ex.* p *\x*. Последовательность (рп) такова, что для каждого nGN точка p_n имеет

координаты (2 I n n , ., . Очевидно, что р(рп, S) « я п - ^ - о о ^ jj

но *cn—v{xn, yn) =* i* еа^ *(2 Ы n} <=*n-+?o* при п->-оо.' случае .

У(с) = sup *ŷ (p, S)* *'ж** «up . p< *(*, y)< (x, ОП* = sup |*y*| = *c*→0.
«в»ФФ(С) <*>VФФ""=с *ix,v)/* (еИ)

Т е о р е.м а 1. *Пусть существует вполне нормЩШШе... прерывная на T(S) функция v : U(S)-+R, монотонная "вдоль^^ккжёШ^ траектории динамической системы F, расположенной в U(S), и такая/ что у(с)-^0 при с-*-0.*

Тогда замкнутое инвариантное множество S системы F является правильным [1].

Доказательство. Предположим от противного, что S — неправильное множество [1]. Тогда существует точка рб (S)\S* неоодянариая [lr]i относительно множества S. Пусть для определенностичига положительно неординарная. Иными словами, существуют последовательности (i*) f-foo и (f**)f-foo, такие, что последовательность

(fft*, Р)) конфйнальна, а «о с л ё д а ^ й ^ й ^ т (/(%, р)) строго неконфинальна множеству S [1]. Без FWf* '•*0*н<> -

считать, что (V*6N)

мерной непрерывности на Г<5) функций оЛi сделанного вйше замечания *~J(f(t*n,* p))->0 при я-*--}-оо, а тогда, поскольку функция *v* монотонна вдоль траекторий системы *F,* существует lim *v(f(t,* р)) =0. Это означает, что и тем более существует lim *v(f(t**, p))*=0.
п-*оо 71

Обозначим *cn=v(f(t**,* р)). Очевидно, что с„->0 при л- ->∞. Тогда

Р(/(<;•; Р), sup р(<7, *s*) —у(Сп).
?6®-1(Сп)

По условию теоремы v(cn)-^0 при сп->0, т. е. *р)*, S)->0, что противоречит строгой неконфинальности последоватеакяр*^* (*f*(t_n^{**}, *p*)).

Полученное противоречие и доказывает теорему* '•v.v;'», \

Следствие. *Пусть S — замкнутое инварийЯзеШщ Множество системы F, обладающее окрестностью U(S),' замЫкание U(S) которой — компакт, и существует непрерывная функция !): 'U(S)-+*R, *обладающая следующими свойствами: 1) v~l(Q)=S; Щ длА любой точки (f(p)* п *U(S))\o~l(v(p))^0; 3) v монотонна вдоль каждой траёШЩи динамической системы F, расположенной б U(S). Тогда S — прощальное множество.*

Действительно, так как *U(S)* множество, замыкание *Щ$)* которого— компакт, то в силу следствия леммы 1 [1] t/fSy является ^-окрестностью инварнаатвого множества S. Из условзйг следствия й компактности *U(S)* вытекает полная нормальность и равномерная на Г(5) непрерывность функции *v.* Кроме того, из леммы следует, что *v(c)* = sup р(р, S) стремится к нулю при стремлении *c* к нулю. Таким
P6D¥(С)
e¥-0

Т

образом, выполнены все условия теоремы 1, и поэтому замкнутое инвариантное множество S системы F является правильным.

Теорема 2. *Пусть замкнутое инвариантное множество S обладает окрестностью $U(S)$, замыкание которой $\overline{U(S)}$ — компакт, и пусть существует вполне нормальная функция $v: U(S) \to \mathbf{R}$, монотонная вдоль каждой траектории динамической системы F, расположенной в $U(S)$. Тогда S — регулярное множество* [1].

Доказательство. Предположим от противного, что S — нерегулярное множество [1]. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется точка $p \in U_\varepsilon(S)$, такая, что $f(p) \cap \Gamma_\varepsilon(S) = \varnothing$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $U_\varepsilon(S) \subset U(S)$, и пусть p — соответствующая точка. Поскольку $f(p)$ целиком расположена в компакте $\overline{U_\varepsilon(S)}$, то $\Delta_p \neq \varnothing$, причем Δ_p — замкнутое инвариантное множество [3, с. 358]. Пусть $q \in \Omega_p$. Предположим сначала, что $q \notin S$. Тогда $f(q) \subset \Delta_p$ и $f(q) \cap S = \varnothing$.

Пусть $q_1 \in f(q)$, причем $q_1 \neq q$ (если бы такой точки не нашлось, то $f(q) = q$ и тогда бы $(f(q) \cap U(S)) \setminus v^{-1}(v(q)) = \varnothing$, что противоречит третьему условию определения вполне нормальной функции v). Пусть $(t_n^*) \uparrow +\infty$ и $(t_n^{**}) \uparrow +\infty$ таковы, что $f(t_n^*, p) \to q$, а $f(t_n^{**}, p) \to q_1$. В силу монотонности функции v вдоль траектории $f(t, p)$ существует $\lim\limits_{t\to+\infty} v(f(t, p)) = v(p)$, причем поскольку v — непрерывная функция, то

$$\lim_{t\to\infty} v(f(t, p)) = \lim_{n\to+\infty} v(f(t_n^*, p)) = v(\lim_{n\to+\infty} f(t_n^*, p)) = v(q).$$

Но тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty} v(f(t_n^{**}, p)) = v(q_1) = v(q)$, т. е. $q_1 \in v^{-1}(v(q))$, и поскольку q_1 — произвольная точка траектории $f(q)$, то $f(q) \subset v^{-1}(v(q))$, что противоречит условию 3 определения 1.

Таким образом, если $\Omega_p \setminus S \neq \varnothing$, то теорема доказана. Аналогичные рассуждения показывают, что невозможен и случай $A_p \setminus S \neq \varnothing$. Пусть, наконец, $\Delta_p \subset S$. Обозначим $\alpha = v(p)$. Тогда в силу условия 2 определения 1 $\alpha \neq 0$. Пусть для определенности $\alpha>0$. Поскольку $\Delta_p \subset S$ и $v(S) = 0$, то в силу равномерной непрерывности функции v на $\overline{U_\varepsilon(S)}$ ($\overline{U_\varepsilon(S)}$ — компакт, а v — непрерывная функция) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall q \in U(S) \setminus S)$ $[\rho(q, S) < \delta \Rightarrow |v(q)| < \varepsilon]$. Это означает, что найдутся точки $t^*>0$ и $t^{**}>0$, такие, что $|v(f(t^*, p))| < \varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ и $|v(f(t^{**}, p))| < \varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, т. е. v убывает вдоль полутраекторий $f(t, p)$ и $f(-t, p)$, $t \in \mathbf{R}^+$, что противоречит монотонности v вдоль траектории $f(p)$.

Полученное противоречие и доказывает невозможность случая $\Delta_p \subset S$, а это в сочетании с доказанными ранее утверждениями о невозможности $\Delta_p \setminus S \neq \varnothing$ полностью доказывает теорему.

Теорема 3. *Пусть инвариантное замкнутое множество S таково, что существует вполне нормальная равномерно на $\Gamma(S)$ непрерывная монотонная вдоль каждой траектории динамической системы F, лежащей в $U(S)$, функция $v: U(S) \to \mathbf{R}$. Тогда ни одна точка $p \in M_F \setminus S$ не является E-точкой множества S* [1].

Доказательство. Пусть от противного существует хотя бы одна E-точка множества S. Обозначим ее p и рассмотрим траекторию $f(p)$. Поскольку p — E-точка множества S, то, каковы бы ни были последовательности $(t_n^*) \uparrow +\infty$ и $(t_n^{**}) \downarrow -\infty$, будем иметь

$$\rho(f(t_n^*, p), S) \to 0 \text{ и } \rho(f(t_n^{**}, p), S) \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $p \in U(S)$ — области определения функции v. Обозначим $c = v(p)$. Возможны два случая: $c>0$ или $c<0$ (если $c=0$, то $p \in S$, что противоречит выбору точки p). Поскольку v монотонна вдоль каждой траектории, то $v(f(t, p))$ либо

возрастает, либо убывает (хотя бы нестрого) как функция параметра
Таким образом, возникают 4 ситуации:

а) $c>0$, $v(f(t, p))$ возрастает;

б) $c<0$, $v(f(t, p))$ возрастает;

в) $c>0$, $v(f(t, p))$ убывает;

г) $c<0$, $v(f(t, p))$ убывает.

Рассмотрим случай а). Так как $v(f(t, p))$ возрастает по t, то сущес вует конечный или равный $+\infty$ предел $\lim\limits_{t\to+\infty} v(f(t, p))$, причем ес этот предел конечен, то $c\leqslant \lim\limits_{t\to+\infty} v(f(t, p))$. С другой стороны, посколь $\rho(f(t_n^*, p), S)\to 0$ при $n\to+\infty$, то в силу равномерной непрерывности на $\Gamma(S)$ существует $\lim\limits_{n\to+\infty} v(f(t_n^*, p))=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(f($ $p))=0<c$, что противоречит полученному ранее неравенству.

Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи.

Таким образом, получим, что предположения теоремы исключают в возможные случаи поведения функции v вдоль E-траектории, что и д казывает справедливость утверждения теоремы.

Литература

1. Петровская И. Г.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 2, с. 233—24
2. Малышев Ю. В.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8, с. 1362—1370.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальн уравнений.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.— 545 с.

Могилевский машиностроительный институт

Поступила в редакци 2 ноября 1983г.

УДК 517.926

А. В. ПРАСОЛОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача восстановления параметров системы по наблюдениям з траекторией не является новой. Такие задачи решаются обычно метод ми теории идентификации или строятся вычислительные алгоритмы дл определения отдельных параметров системы, использующие особенност места этих параметров в заданной структуре. В общей постановке зад ча восстановления всей матрицы коэффициентов является, по-видим му, новой, хотя и очень простой. Условия ее разрешимости легко пров ряемы, что позволяет создать не слишком громоздкие программы дл ЭВМ, реализующие предлагаемый метод.

Рассмотрим линейную стационарную систему дифференциальны уравнений

$$\dot X(t)=AX(t), \qquad (1$$

где $X=\{x_k\}$; $A=\{a_{kj}\}$; $k, j=1, ..., n$. Поставим задачу выяснить услови когда по наблюдениям за вектором состояния системы $X(t)$ в дискре ные моменты времени $t=t_m$ $(m=0, 1, ..., N;\ n<N)$ можно получить неи вестную до наблюдений постоянную матрицу A и проанализироват способы ее построения.

Пусть имеется таблица чисел X_m, про которую нам известно лишь т что $X_m=X(t_m)$ — точка на траектории системы (1). Предположим, чт среди векторов X_m имеется n линейно-независимых. Допустим также, чт наблюдения производятся через равные промежутки времени Δ, а имен но $t_m=t_0+m\Delta$. Эти два предположения могут быть сведены к одному Для доказательства этого приведем две леммы.