Лекция 14. Всемирное тяготение

Содержание

1. Закон тяготения Ньютона
2. Гравитационная постоянная и её измерение
3. Гравитационное поле. Напряженность и потенциал поля тяготения
4. Гравитационная и инертная масса тела

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Закон тяготения Ньютона

Закономерности движения планет и их спутников, падения тел на Землю, колебаний маятников свидетельствуют о существовании сил взаимного притяжения тел друг к другу.

Эти силы подчиняются закону всемирного тяготения, установленному Ньютоном в 1687 г.

Согласно этому закону между всякими двумя материальными точками массами m_1 и m_2 действует сила всемирного тяготения, прямо пропорциональная произведению их масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния R между ними $F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

В векторной форме закон всемирного тяготения записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{R_{21}^3}\vec{R}_{21},$$

где $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй.

$\vec{R}_{21}$ - радиус-вектор, проведенный от второй точки к первой;

$R_{21} = \left|\vec{R}_{21}\right|$ - расстояние между точками.

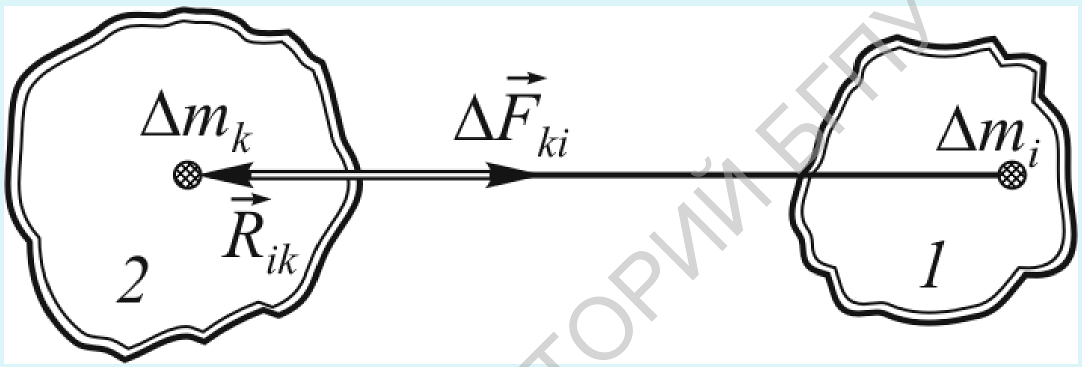
Коэффициент пропорциональности G называют гравитационной постоянной.

Знак «минус» указывает на то, что $\vec{F}_{12}$ — сила притяжения противоположна по направлению вектору $\vec{R}_{21}$.

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Если взаимодействующие тела имеют конечные размеры и не могут рассматриваться как материальные точки, то для определения силы гравитационного притяжения между телами их необходимо мысленно разбить на малые элементы, которые можно принять за материальные точки.



Сила, с которой элемент Δm_k второго тела притягивается к элементу Δm_i первого тела,

$$\Delta \vec{F}_{ki} = -G \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{R_{ik}^3} \vec{R}_{ik} \quad .$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Просуммировав $\Delta\vec{F}_{ki}$ по всем элементам второго тела k, получим силу притяжения этого тела элементом первого тела Δm_i .

$$\Delta\vec{F}_k = -G\sum_k \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{R_{ik}^3}\vec{R}_{ik}$$

Суммируя последнее выражение по всем элементам первого тела, получим суммарную силу, с которой второе тело притягивается первым телом

$$\vec{F}_{21} = -\sum_k \sum_i G\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{R_{ik}^3}\vec{R}_{ik} \quad .$$

Практически суммирование сводится к интегрированию и представляет в общем случае сложную математическую задачу.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Можно показать, что эта формула эквивалентна формуле для материальных точек в следующих случаях:

- оба тела имеют сферическую форму, а их плотности зависят только от расстояний до центров этих тел;
- размеры одного тела значительно меньше размеров второго тела, причем второе тело имеет сферическую форму.

Поскольку приближенно принимается, что Земля имеет шарообразную форму, а ее плотность зависит только от расстояния до центра, то сила притяжения любого тела Землей вычисляется по формуле для материальных точек.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Гравитационная постоянная и её измерение

Гравитационная постоянная G не может быть определена из астрономических наблюдений. Она определяется в лабораторном эксперименте.

Все эксперименты можно условно разделить на две группы.

В первой группе экспериментов сила гравитационного взаимодействия сравнивается с упругой силой нити горизонтальных крутильных весов.

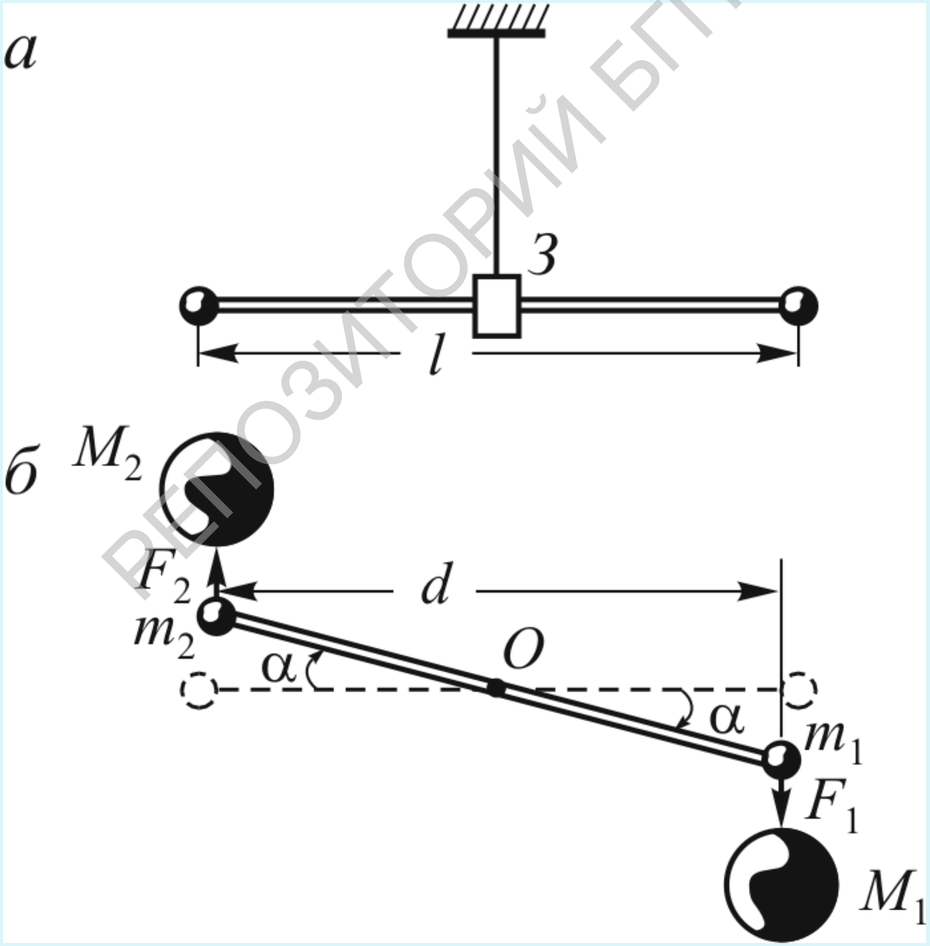
Впервые гравитационную постоянную определил с помощью крутильных весов в 1798 г. английский физик и химик Г. Кавендиш (1731—1810).

Трудность этих опытов состоит в том, что при не очень больших массах, которые могут быть использованы в этом методе, силы притяжения оказываются очень малыми.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке.

Однородное коромысло достаточно большой длины с двумя одинаковыми массами $m_1 = m_2 = m$, расстояние между которыми l, подвешено горизонтально на очень тонкой и длинной нити и находится в положении равновесия.



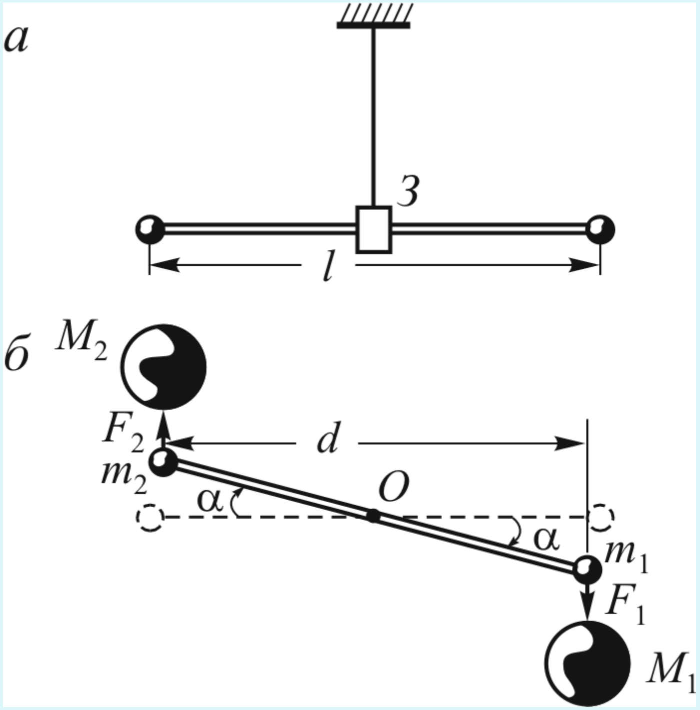
РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Если к массам m_1 и m_2 приблизить сбоку другие массы $M_1=M_2=M$ (на рисунке показано расположение масс, если смотреть сверху), то силы взаимного тяготения закручивают коромысло с нитью на определенный угол около вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, в направлении действия указанных на рисунке гравитационных сил.

Обратим внимание на тот факт, что Кавендиш получил численный результат, который только на один процент отличается от современного значения.

Во второй группе экспериментов сила гравитационного взаимодействия сравнивается с силой тяжести, для чего используются рычажные весы.

Так, в 1898 г. более точное значение G было определено методом Жоли—Рихарда .

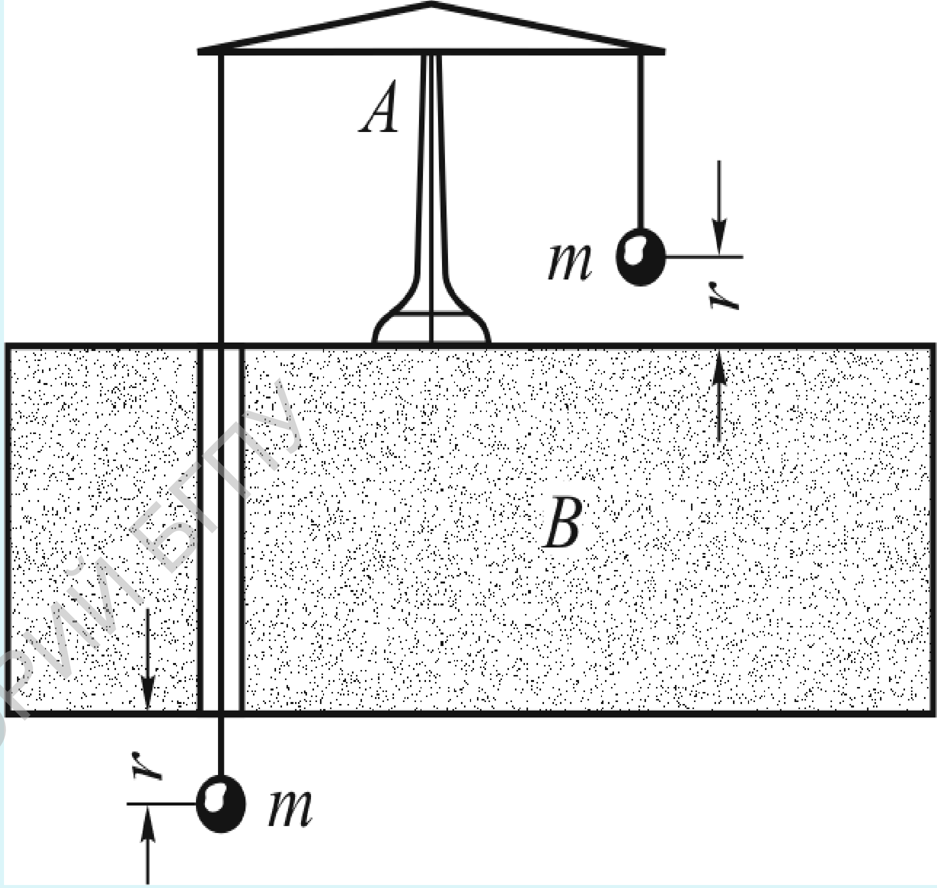


РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Два одинаковых шара **m** были подвешены к разным концам коромысла рычажных весов А, установленных на массивной плоскопараллельной плите В.

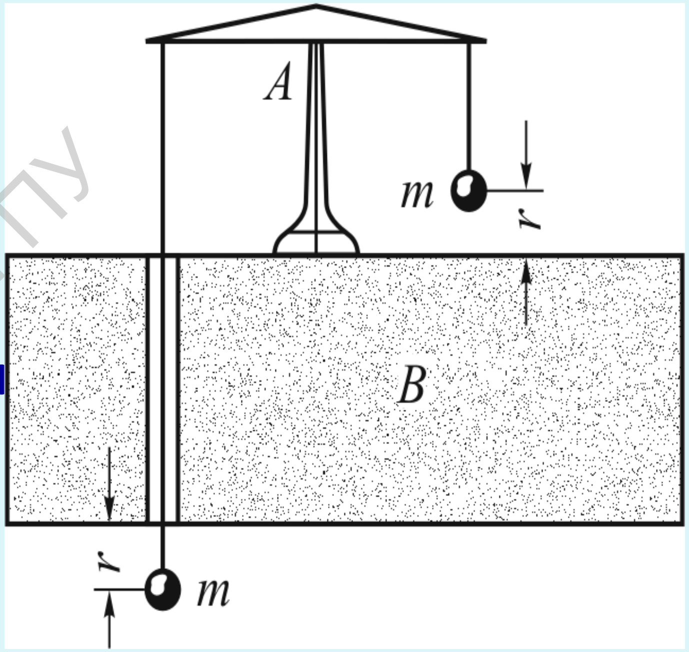
Один шар находился над плитой, а другой — под ней.

Если шары находятся вдали от краев плиты, а расстояния r от шаров до плиты во много раз меньше ширины и длины плиты, то, как можно показать, силы тяготения шаров к плите не зависят от r и равны $2\pi GmM\ /\ S$, где m и M — массы шара и плиты, а S — площадь поверхности плиты.



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

На левый шар действовала сила, направленная вертикально вверх, а на правый — такая же по величине сила, направленная вертикально вниз. Поэтому равновесие весов нарушалось.



По отклонению стрелки весов из положения равновесия можно было измерить силы, действовавшие на шары со стороны плиты.

Числовое значение гравитационной постоянной зависит от выбора системы единиц измерения массы, длины и времени.

В настоящее время наиболее точным из определенных разными способами принимается значение

$$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ м^3/(кг \cdot с^2).$$

Гравитационная постоянная численно равна силе, с которой притягиваются две единичные массы, находящиеся на расстоянии, равном единице длины.

В СИ она равна силе взаимодействия двух материальных точек массой по одному килограмму, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Гравитационное поле. Напряженность и потенциал поля тяготения

В соответствии с постулатами классической физики, гравитационное взаимодействие передается мгновенно без участия промежуточной среды на любые расстояния.

Поэтому классическая теория гравитации представляет собой теорию действия на расстоянии (дальнодействия).

Согласно общей теории относительности Эйнштейна всемирное тяготение обусловлено существованием гравитационных полей, действие которых распространяется с конечной скоростью (скоростью света в вакууме).

С гравитационными полями связаны геометрические свойства пространства и времени.

Природа гравитации — одна из самых сложных проблем физики.

Важнейшим свойством гравитационного поля является его универсальность.

Этим полем обладают все без исключения тела и частицы, независимо от среды, в которой они находятся.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Напряженность и потенциал поля тяготения

Величина силы притяжения, действующая в данной точке гравитационного поля на тело единичной массы, называется напряженностью гравитационного поля

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Учитывая, что $\vec{F} = -G\frac{mM}{R^3}\vec{R}$,

получим

$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^3}\vec{R}.$$

Поле называется центральным, если в каждой его точке вектор напряженности направлен по радиусу-вектору, проведенному из центра поля.

Если в каждой точке поля напряженность остается постоянной, поле называется однородным.

Гравитационное поле около поверхности Земли с некоторым приближением можно считать однородным.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

В соответствии с принципом суперпозиции при наличии нескольких гравитационных полей, созданных отдельными материальными точками, напряженность суммарного поля равна векторной сумме напряженностей отдельных полей

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i \quad .$$

Гравитационное поле в каждой точке пространства характеризуется также энергетической (скалярной) величиной — потенциалом.

Потенциал в данной точке поля равен работе, которую выполняет сила гравитационного притяжения при удалении тела единичной массы из этой точки в бесконечность.

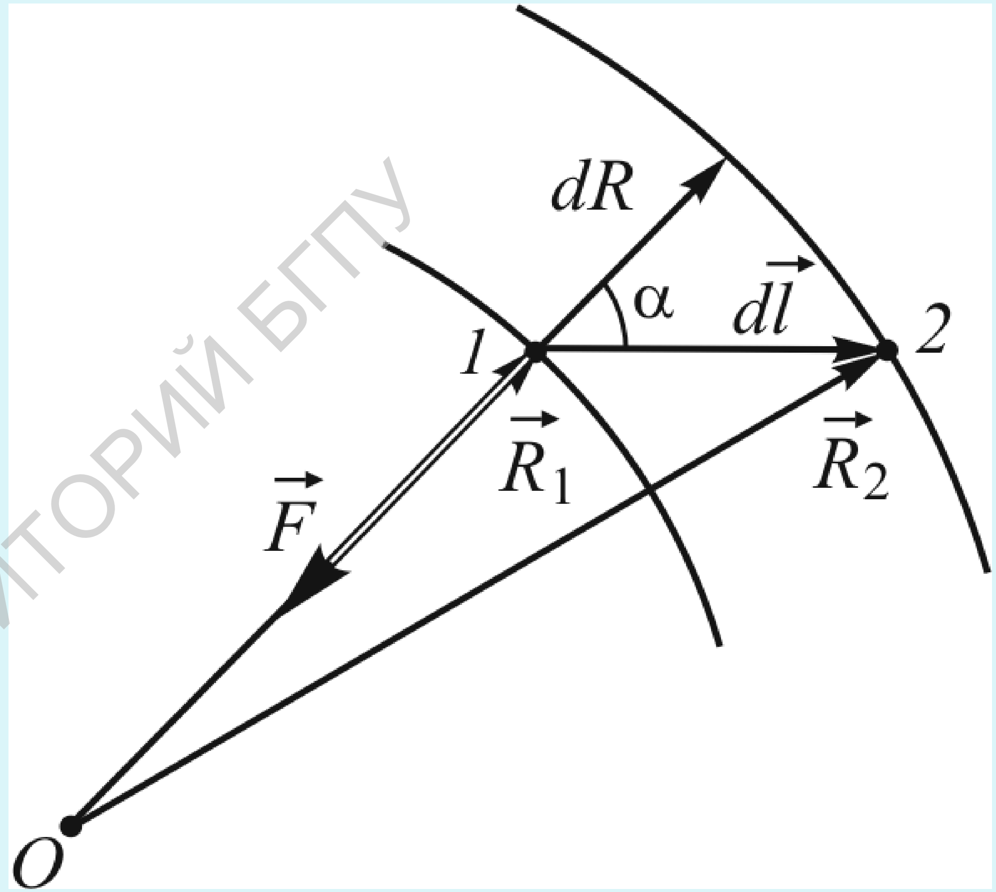
Подсчитаем работу, которую выполняют гравитационные силы при перемещении материальной точки массой m в гравитационном поле, создаваемом неподвижной материальной точкой массой M.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Поместим материальную точку М в начало отсчета.

Гравитационное поле, создаваемое материальной точкой М, является центральным.

Это означает, что если из начала отсчета описать сферу радиуса R, то в любой ее точке сила притяжения $\vec{F}$ будет постоянная по модулю и направлена вдоль радиуса сферы.



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Пусть материальная точка массой m перемещается из положения 1 в положение 2 без изменения кинетической энергии.

В соответствии с определением, работа гравитационных сил при элементарном перемещении $d\vec{l}$ $dA = Fdl\cos(\vec{F}d\vec{l})$.

Поскольку, как видно из рисунка, $\cos(\vec{F}d\vec{l}) = -\cos\alpha$

и $dl\cos\alpha = dR$, то $dA = -FdR$.

Работа силы тяготения при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 определяется формулой

$$A_{12} = -\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}dR = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Гравитационные силы являются консервативными, следовательно, их работа равна уменьшению потенциальной энергии гравитационного поля

$$A_{12} = -\Delta E_{\text{п}} = -\left(E_{\text{п}2} - E_{\text{п}1}\right) = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}.$$

$$E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} = GmM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Если за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принять ее значение в бесконечности ($R_2 \to \infty$ и $E_{\text{п}2} \to 0$), то при таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия гравитационного поля всегда будет отрицательной

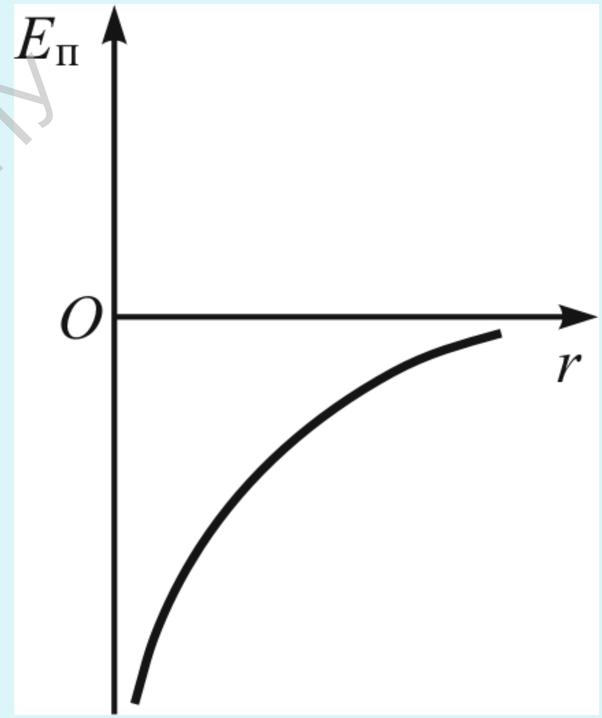
$$E_{\text{п}} = -G\frac{mM}{R}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

На рисунке изображена для этого случая зависимость потенциальной энергии гравитационного поля от расстояния.

Обозначив потенциал гравитационного поля через φ, можно записать:

$$\varphi = \frac{A_{1\infty}}{m} = \frac{E_{п}}{m}.$$



Подставив значение $Å_{ï}$ в формулу, получим следующее выражение для потенциала гравитационного поля

$$\varphi = -\frac{GM}{R}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Гравитационная и инертная масса тела

Как отмечалось ранее, масса является количественной мерой инертных и гравитационных свойств тела.

Действительно, с одной стороны, масса входит во второй закон Ньютона и характеризует инертные свойства тела, со второй — масса тела определяет силу гравитационного притяжения и выступает как гравитационная, или тяжелая.

Возникает закономерный вопрос: можно ли меру разных свойств материи выражать одной и той же физической величиной?

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Рассмотрим в инерциальной системе отсчета свободное падение двух тел вблизи поверхности Земли.

Для каждого тела запишем второй закон Ньютона

$$m_{1ин} g = G \frac{m_{1гр} M}{R_з^2}, \qquad m_{2ин} g = G \frac{m_{2гр} M}{R_з^2},$$

где $m_{1гр}$ и $m_{2гр}$ — гравитационные массы первого и второго тела соответственно; $m_{1ин}$, $m_{2ин}$ — инертные массы этих тел; $R_з$ — радиус Земли; М — масса Земли.

Разделив друг на друга последние два соотношения, получим:

$$\frac{m_{1ин}}{m_{2ин}} = \frac{m_{1гр}}{m_{2гр}}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Поскольку тела выбираются произвольно, то для каждого тела можно записать:

$$\frac{m_{\text{ин}}}{m_{\text{гр}}} = \text{const} \quad .$$

Формула справедлива при условии, что ускорение свободного падения одинаково для всех тел.

Как уже отмечалось, впервые это экспериментально доказал Галилей.

Проверку пропорциональности между инертной и тяготеющей массой производил И. Ньютон в процессе определения ускорения свободного падения по колебаниям маятников из различных материалов.

Им было установлено, что пропорциональность между этими массами выполняется с точностью до 1/1000.

К такому же выводу пришел немецкий астроном Бессель (1784—1846) с точностью 1/60 000.

Еще более строгую опытную проверку данного факта провел в 1890 г. венгерский физик Этвеш (1848—1919).

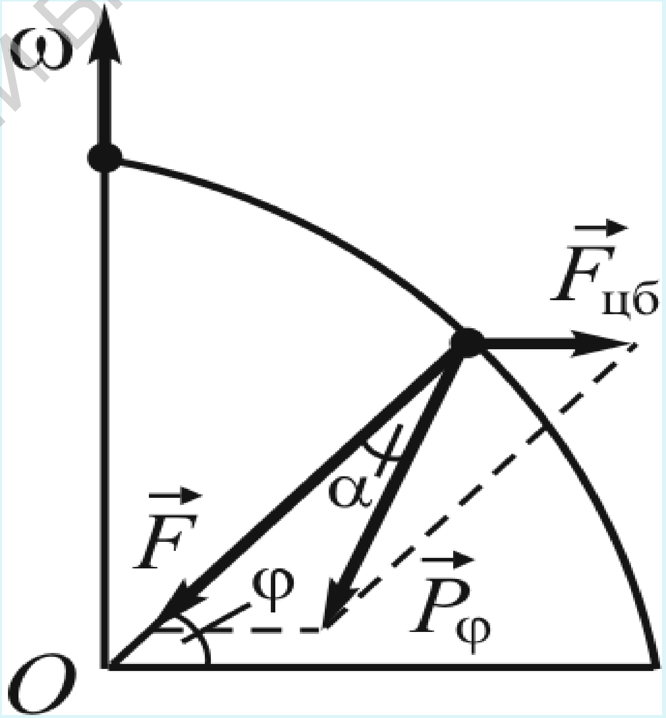
Рассмотрим основную идею его опытов.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

На груз маятника, установленного на определенной географической широте φ, действует сила гравитационного притяжения $\vec{F}$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$, которая обусловлена вращением Земли.

Первая сила пропорциональна гравитационной массе, а вторая — инертной массе тела.

Отвес принимает положение, соответствующее направлению результирующей сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_{цб}$, отклоняясь на некоторый угол α от направления к центру Земли.



РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Этот угол зависит от отношения инертной массы тела к его гравитационной массе: $m_{ин} / m_{ГР}$

Если бы инертная и гравитационная массы не были строго пропорциональны друг другу, то угол отклонения отвеса зависел бы от материала груза.

Используя грузы из разных материалов, Этвеш не обнаружил изменения угла отклонения отвеса.

Эти опыты (относительная ошибка ($\sim 10^{-8}$) убедительно подтвердили пропорциональность инертной и гравитационной масс.

Путем выбора единиц физических величин можно достичь такого результата, что постоянная в соотношении $m_{ин} / m_{ГР} = const$ окажется равной единице.

В этом случае гравитационная масса будет равна инертной массе тела

$$m_{ин} = m_{гр} = m$$

.

В начале 20-го столетия пропорциональность инертной и гравитационной массы была доказана более точными методами советским кораблестроителем, механиком и математиком, академиком Крыловым (1863—1945).

Тождественность гравитационной и инертной масс подтверждается также в общей теории относительности Эйнштейна.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ