Лекция 13. Понятие о твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной точки

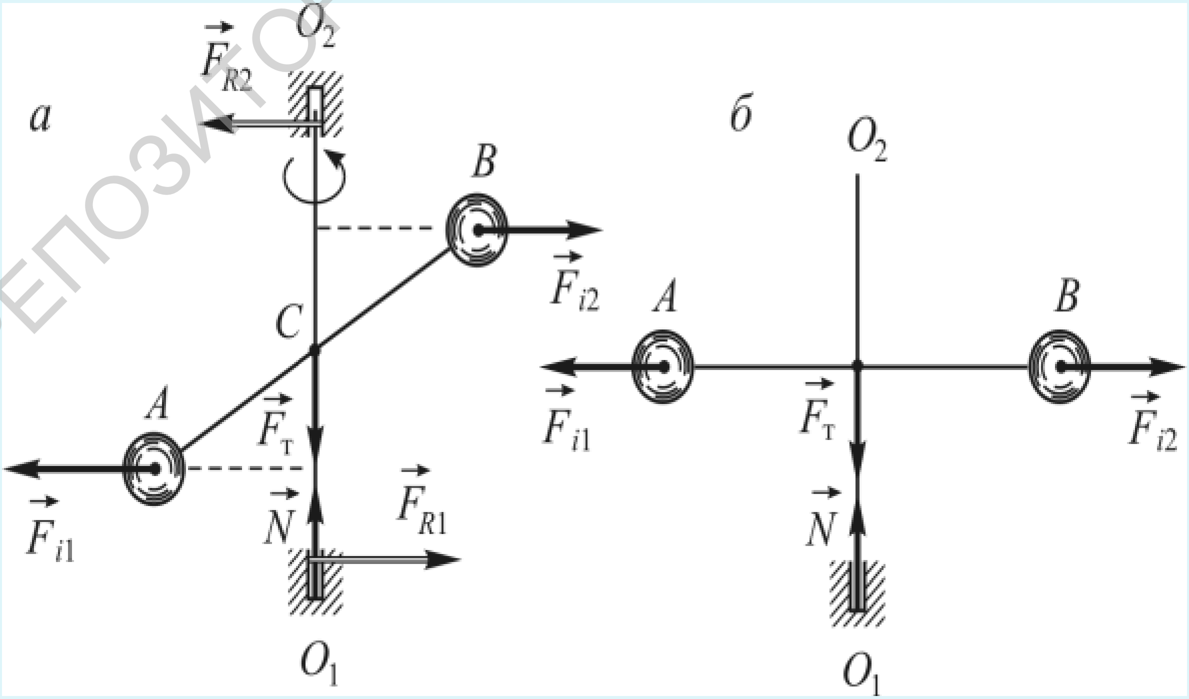
Содержание

Свободные оси вращения

Неподвижность осей вращения обеспечивается закреплением их концов в подшипниках.

Пусть ось проходит через центр масс механической системы и трение в подшипниках пренебрежимо мало.

Пока тело неподвижно, на ось действует сила реакции только нижней опоры $\vec{N}$; она направлена вдоль оси вверх и уравновешивает силу тяжести тела $\vec{F}_T$, приложенную в его центре масс *C*.

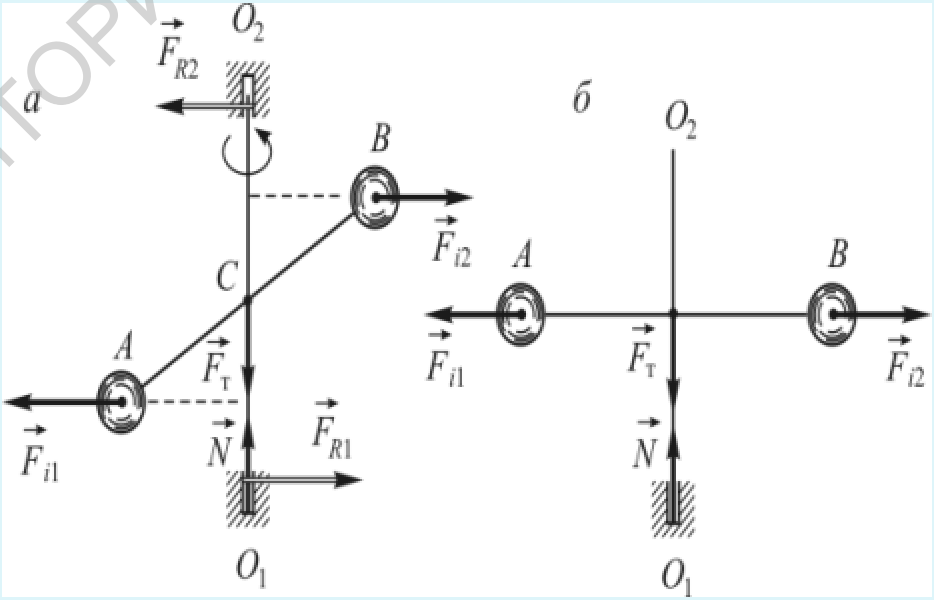


Начнем вращать тело с угловой скоростью ω .

Теперь на каждую частицу массой m , находящуюся на расстоянии ***r*** от оси вращения, будет действовать еще и

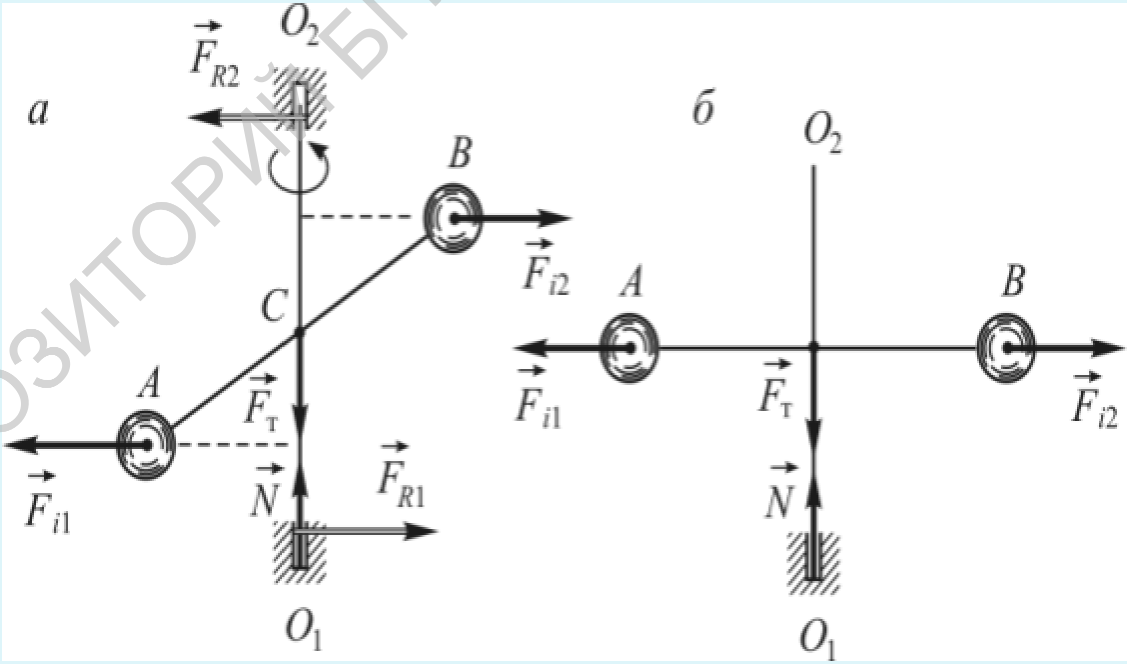
центробежная сила инерции $F_i = mr\omega^2$, лежащая в плоскости вращения частицы и направленная по радиусу от оси.

Результирующие этих сил $\vec{F}_{i1}$ и $\vec{F}_{i2}$ образуют пару сил, которая стремится повернуть тело по часовой стрелке вокруг оси, перпендикуляр-ной плоскости чертежа, и вызывает противонаправ-ленные реакции подшипников $\vec{F}_{R1}$ и $\vec{F}_{R2}$.

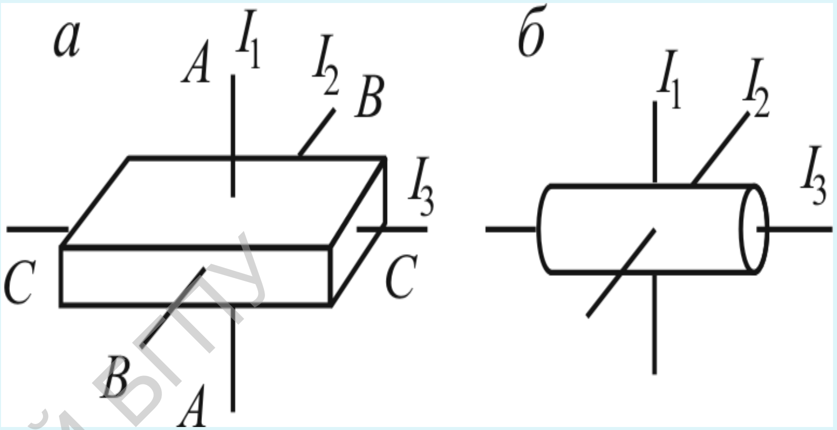


Если рассматриваемому телу дать возможность свободно вращаться в горизонтальной плоскости, то под действием пары сил $\vec{F}_{i1}$ и $\vec{F}_{i2}$ оно повернется так, что линия АВ станет перпендикулярной оси вращения O_1O_2 и момент пары сил и реакции осей обратятся в 0 (рис.б).

Связанная с телом ось, положение которой в пространстве сохраняется при отсутствии внешних воздействий, называется свободной осью.



Расчеты показывают, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси, которые пересекаются в центре масс.



В общем случае момент инерции относительно одной из них максимальный, относительно другой — минимальный, а относительно третьей имеет промежуточное значение.

Эти оси называют главными осями инерции тела, а соответствующие моменты инерции I_1 , I_2 , I_3 — главными моментами инерции.

Для тел правильной формы эти оси находятся достаточно легко.

Так, у однородного параллелепипеда главными осями инерции будут оси, которые проходят через центр масс перпендикулярно его граням (рис. *а*), причем наибольший момент инерции — I_1, а наименьший —I_3.

Для однородных тел вращения главными осями инерции являются оси симметрии.

Если тело вращается вокруг одной из свободных осей (например, вокруг оси *OZ*) и на него не действуют никакие внешние силы, то согласно закону сохранения момента импульса

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega} = \text{const}\ .$$

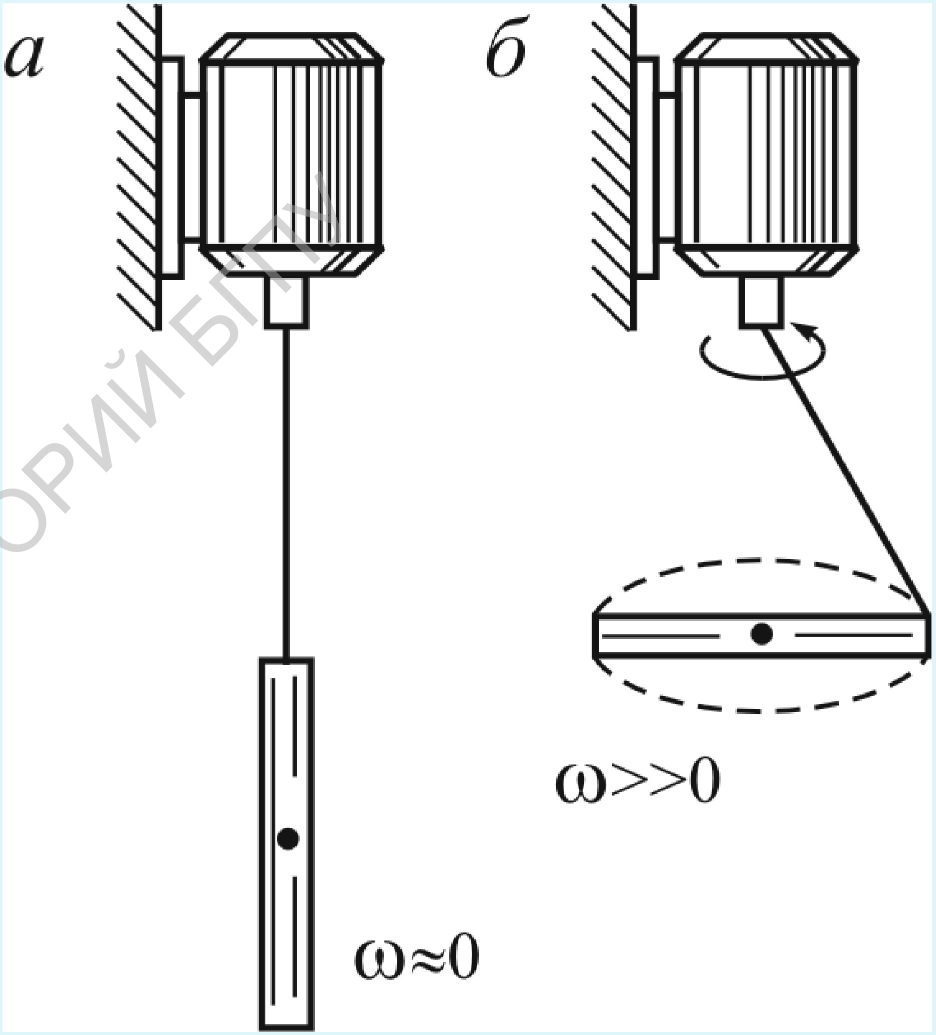
оно должно сохранять величину и направление угловой скорости, т. е. положение свободной оси.

В теоретической механике утверждается, что вращение устойчиво относительно главных осей, которые соответствуют наибольшему и наименьшему моментам инерции.

Вращение вокруг главной оси, соответствующей промежуточному моменту инерции, неустойчиво.

Если же на вращающееся тело действуют внешние силы, то устойчивым будет вращение только относительно оси, соответствующей наибольшему моменту инерции, поскольку для этой оси будет наименьшим относительное изменение момента импульса.

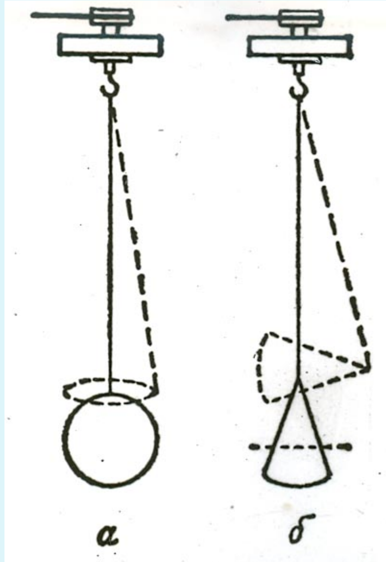
Устойчивость вращения разных тел вокруг главных осей инерции можно продемонстрировать на следующем опыте.

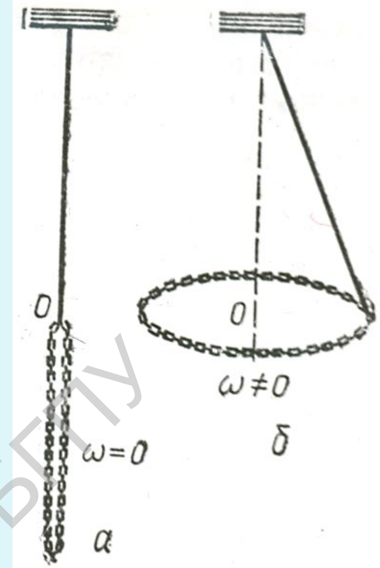


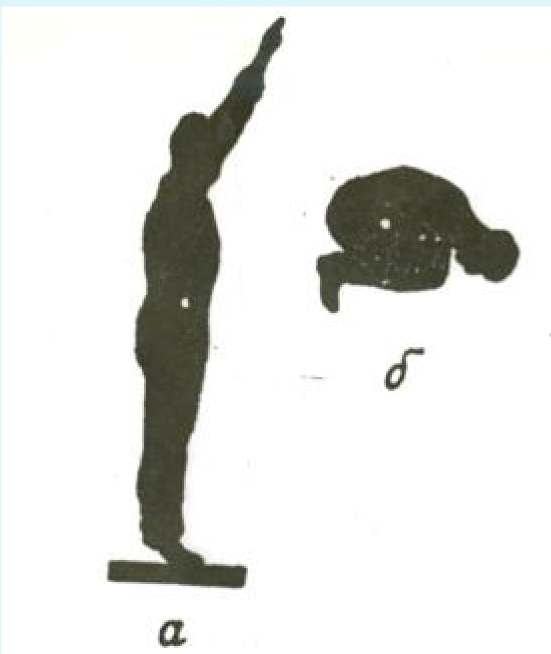
В устройствах с быстро вращающимися частями важно обеспечить их вращение вокруг свободных осей, иначе возникнут чрезвычайно высокие динамические нагрузки на оси и подшипники.

Главные оси инерции обладают важной особенностью:

при вращении тела вокруг любой из них момент импульса тела совпадает по направлению с угловой скоростью и определяется формулой $\vec{L} = I\vec{\omega}$.


а
б


0
ω=0
а
0
ω≠0
б


а
б


а

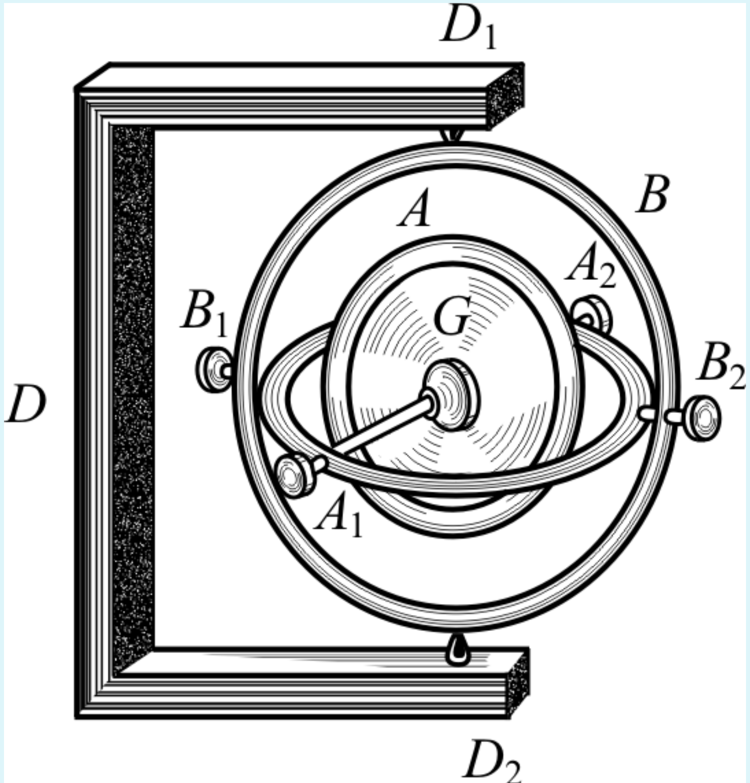

б

Гироскопы

Применяемые в технике массивные симметричные тела, вращающиеся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии, носят название гироскопов (или волчков).

Действие гироскопа основано на свойстве вращающегося твердого тела сохранять неизменным направление оси вращения.

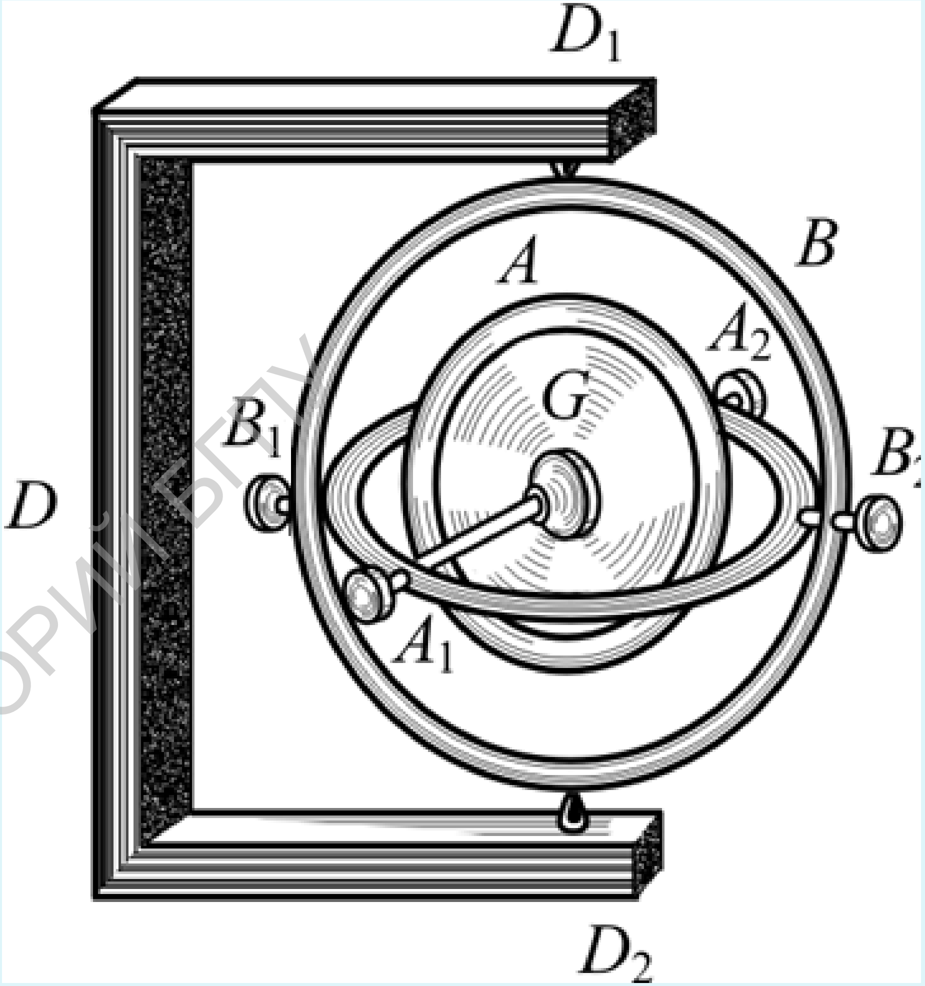
Простейшей моделью гироскопа является карданов подвес. Карданов подвес представляет собой массивный диск G, ось вращения которого A_1A_2 опирается на кольцо.



Это кольцо в свою очередь также имеет ось вращения B_1B_2 перпендикулярную оси вращения диска, и опирающуюся на другое (внешнее) кольцо.

Ось вращения внешнего кольца D_1D_2 перпендикулярна оси вращения диска и оси вращения внутреннего кольца.

Таким образом, диск может свободно вращаться в пространстве в любых направлениях.



Если привести гироскоп в быстрое вращение, то при любом повороте подставки ось его вращения сохраняет неизменным свое направление.

Момент импульса гироскопа совпадает с его осью вращения.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Чтобы изменить направление его оси вращения на гироскоп необходимо подействовать моментом внешних сил.

Если к вращающемуся гироскопу приложить пару сил, стремящуюся повернуть его около оси, перпендикулярной к оси его вращения, то он станет поворачиваться около третьей оси, перпендикулярной первым двум.

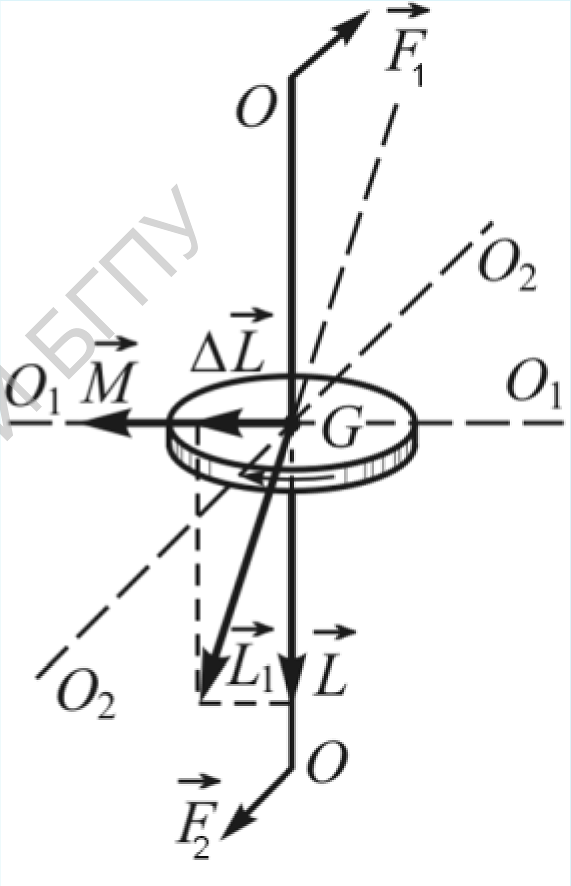
Это явление получило название гироскопического эффекта.

Рассмотрим подробнее гироскопический эффект.

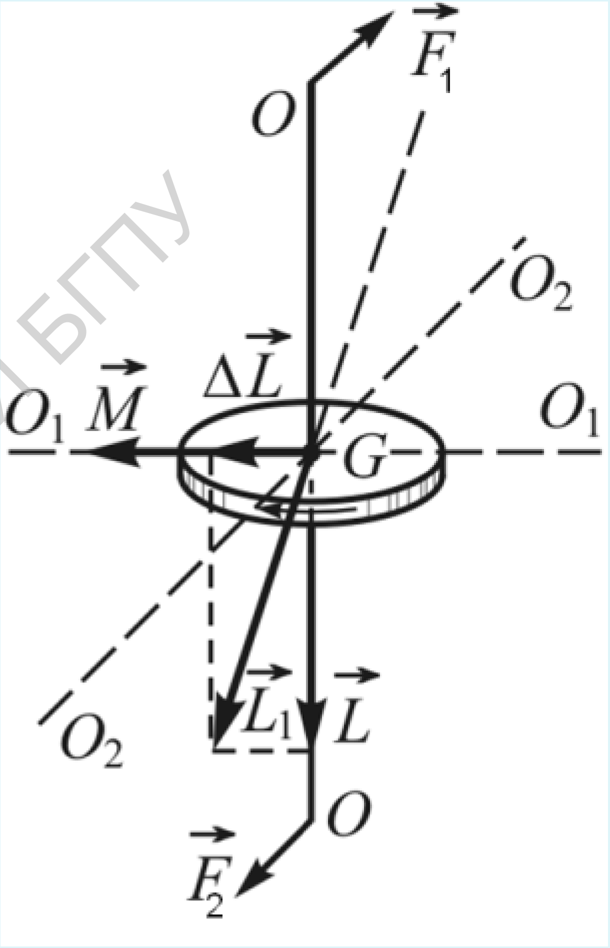
Пусть гироскоп G вращается около оси OO в указанном направлении.

Приложим к нему пару сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, перпендикулярных плоскости рисунка и стремящихся повернуть его около оси O_1O_1.

Гироскоп при этом повернется около оси O_2O_2, перпендикулярной к плоскости рисунка.



Таким образом, в результате гироскопического эффекта гироскоп стремится расположить ось своего вращения таким образом, чтобы она образовывала возможно меньший угол с осью вынужденного вращения O_1O_1 и чтобы оба вращения совершались в одном и том же направлении.



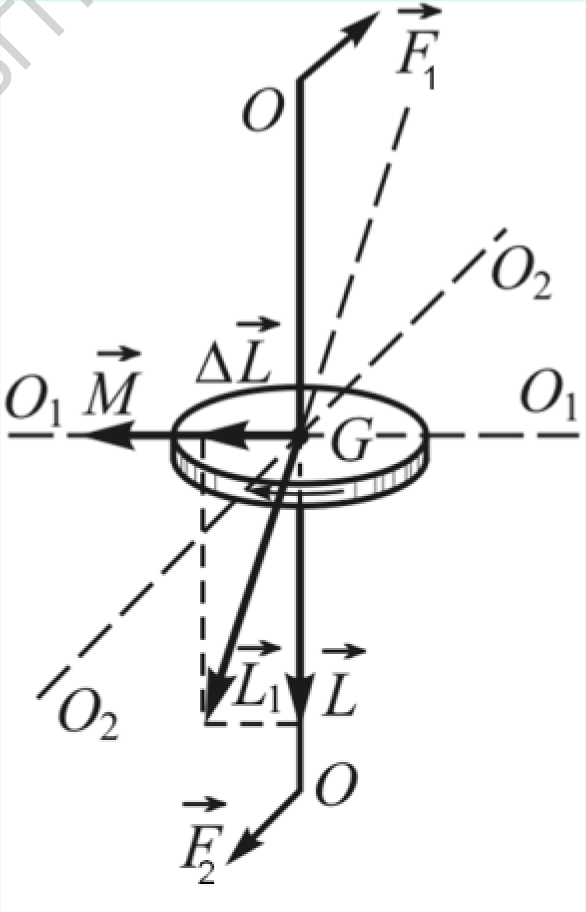
Парадоксальное на первый взгляд поведение гироскопа оказывается полностью соответствующим законам динамики вращательного движения.

В самом деле, момент сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлен вдоль оси O_1O_1 влево.

Вектор момента импульса гироскопа $\vec{L}$ для изображенного на рисунке случая будет направлен вдоль оси OO вниз.

За время Δt момент импульса гироскопа получит приращение, равное $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$, которое имеет такое же направление как и $\vec{M}$.

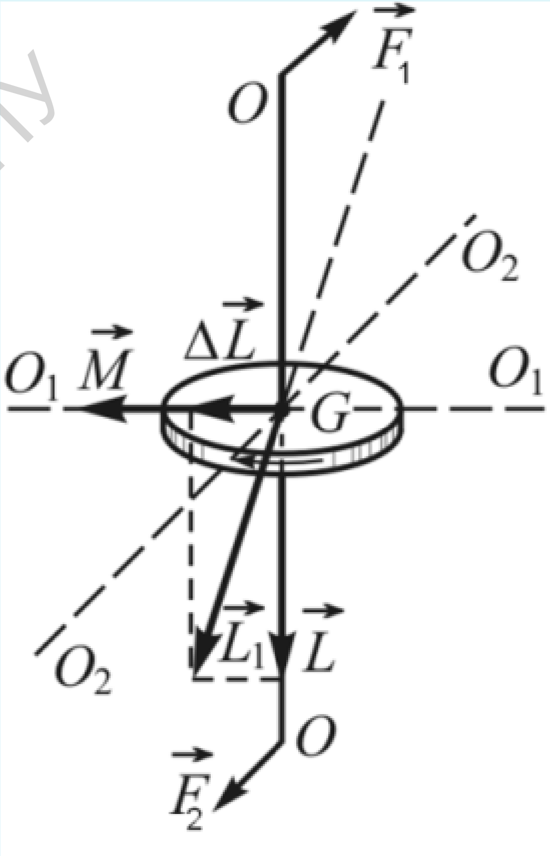
Момент импульса гироскопа спустя время *Δt* будет равен Результирующей $\vec{L}_1 = \vec{L} + \Delta\vec{L}$, лежащей в плоскости чертежа. Направление вектора $\vec{L}_1$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа.



Таким образом, ось гироскопа повернется вокруг оси O_2O_2 перпендикулярной плоскости рисунка.

При этом поворот осуществляется таким образом, что угол между векторами $\vec{M}$ и $\vec{L}$ уменьшается.

Если момент внешних сил $\vec{M}$ будет действовать на гироскоп длительное время, то ось гироскопа окончательно установится таким образом, что ось и направление собственного вращения совпадут с осью и направлением вращения под действием внешних сил, т.е. вектор $\vec{L}$ совпадет по направлению с вектором $\vec{M}$.

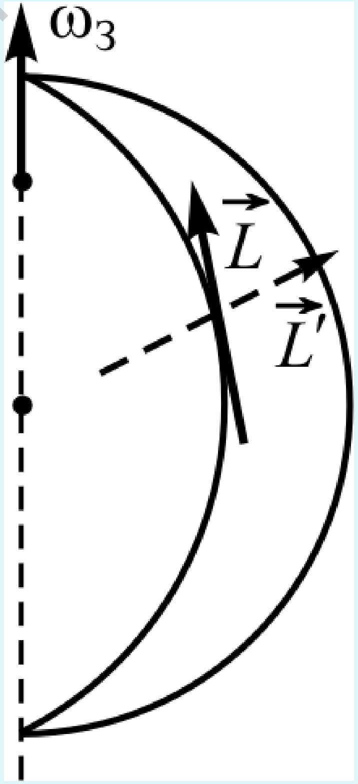


Гироскопы находят различное применение в физике и технике.

Они могут быть использованы в качестве компаса.

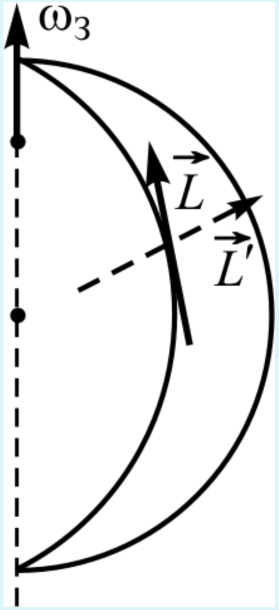
Гироскопический компас представляет собой быстро вращающийся волчок (до 30000 об/мин), ось которого в отличие от рассмотренного случая может свободно поворачиваться только в горизонтальной плоскости.

В результате суточного вращения Земли гирокомпас оказывается под дейтсвием сил, которые стремятся вовлечь его во вращение вокруг земной оси (аналогично силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в рассмотренном нами случае).



В результате ось гироскопа поворачивается так, чтобы угол между вектором момента импульса гироскопа $\vec{L}$ и вектором угловой скорости Земли $\vec{\omega}_з$ уменьшался.

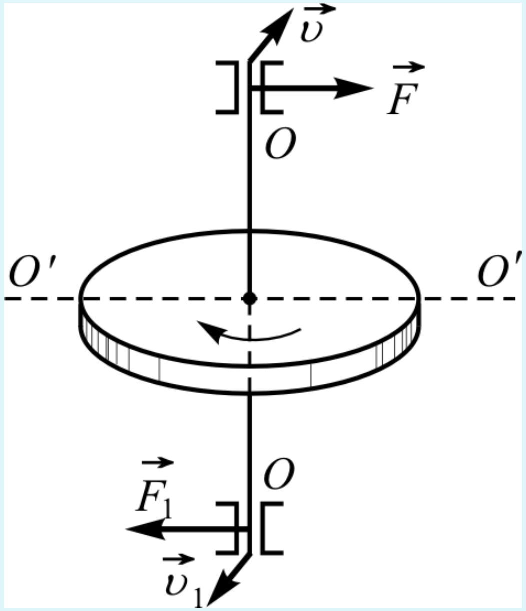
Это будет продолжаться до тех пор, пока угол между $\vec{L}$ и $\vec{\omega}_з$ не станет минимальным, т.е. пока ось гироскопа не установится в меридиальной плоскости.



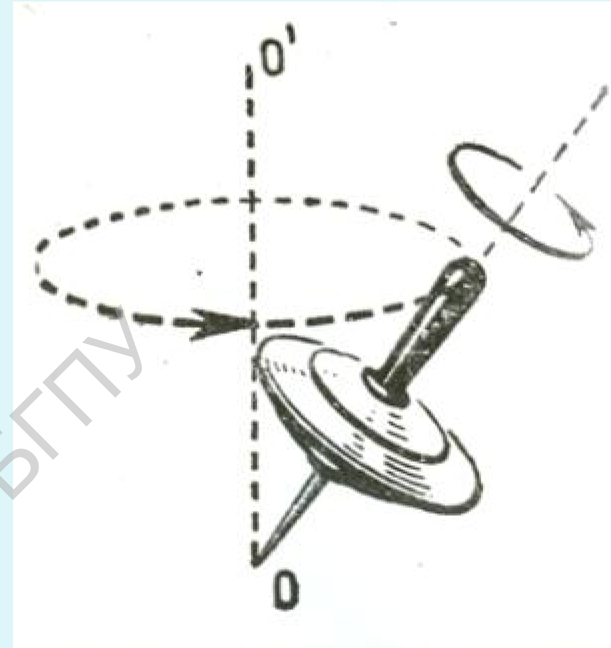
В настоящее время гироскопы используются в различных аэронавигационных приборах («искусственный горизонт»), большие гироскопы используются для уменьшения качки судов.

В ряде случаев при наличии в механизмах частей с быстрым вращением гироскопические силы могут оказывать вредное влияние.

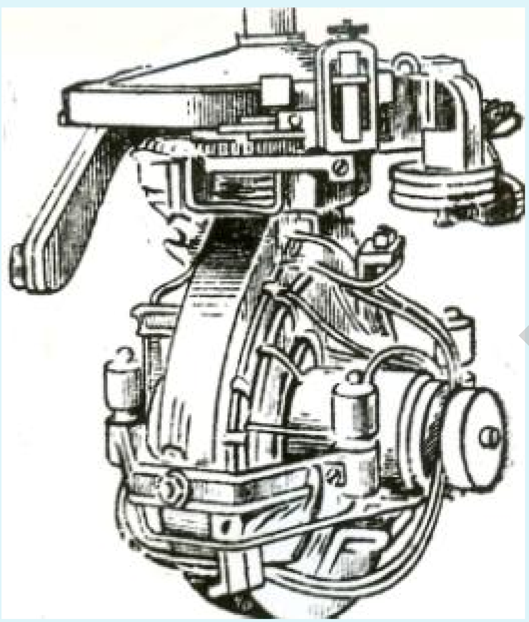
Например, при резком повороте корабля быстро вращающаяся ось турбины оказывает значительное дополнительное давление на подшипники, что может привести к их разрушению.

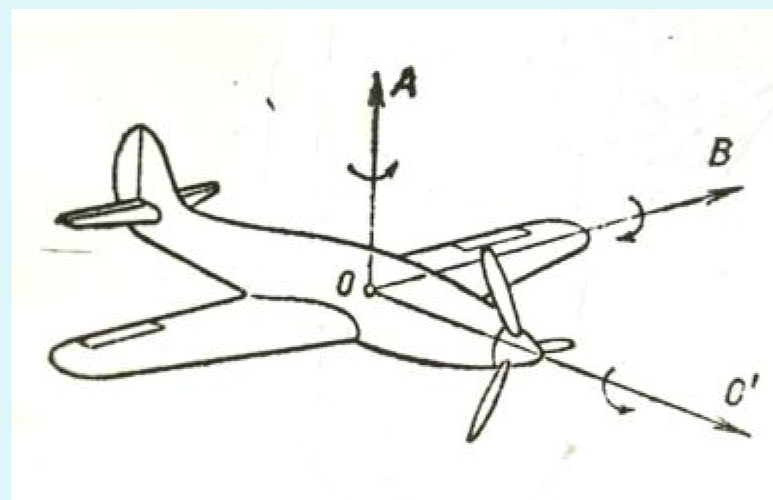


$\vec{\upsilon}$
$\vec{F}$
O
O'
O'
O
$\vec{F}_1$
$\vec{\upsilon}_1$



O'
O





A
B
O
C'

Условия равновесия твёрдого тела

Для равновесия твердого тела необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 .$$

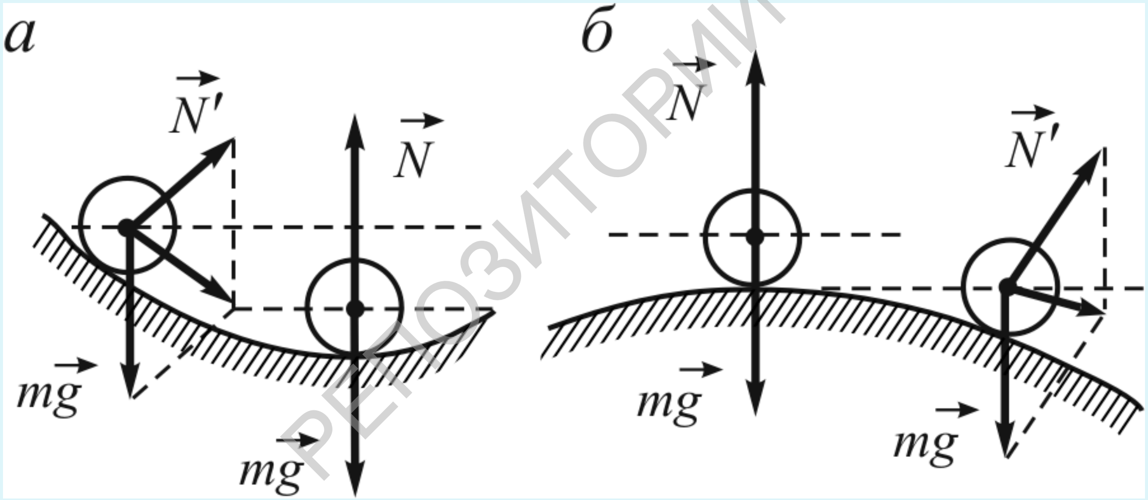
б) суммарный момент внешних сил относительно любой оси (точки) должен быть равен нулю:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 .$$

Если тело в данный момент находится в равновесии, то это не значит, что оно будет оставаться в таком положении долгое время.

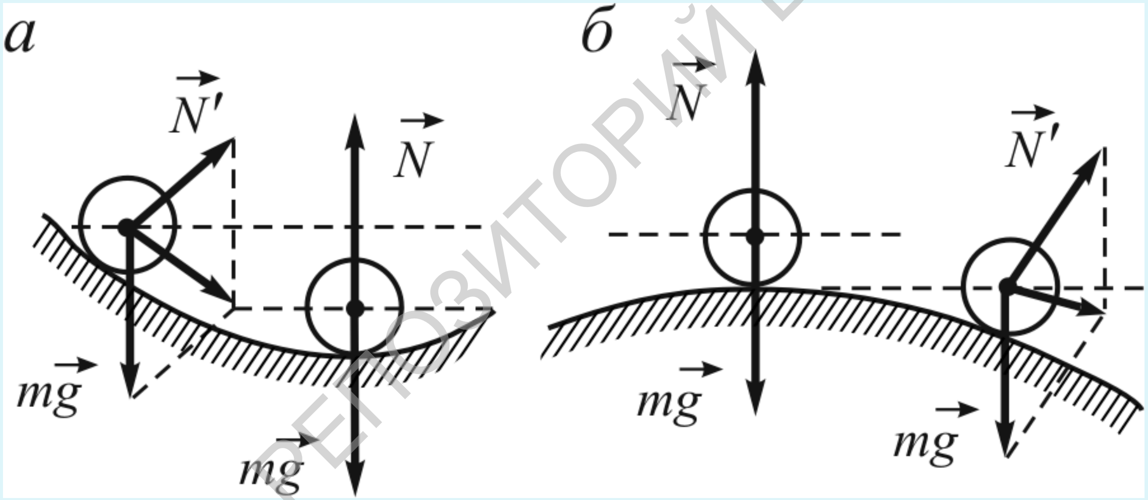
Рассмотрим, как меняется результирующая действующих на тело сил при малом отклонении его от состояния равновесия.

Пусть тело, например шар, находится в состоянии покоя в нижней точке гладкой сферы.



Если при малом отклонении тела от положения равновесия результирующая внешних сил стремится вернуть его в прежнее положение (рис. а), то говорят, что тело находится в устойчивом равновесии.

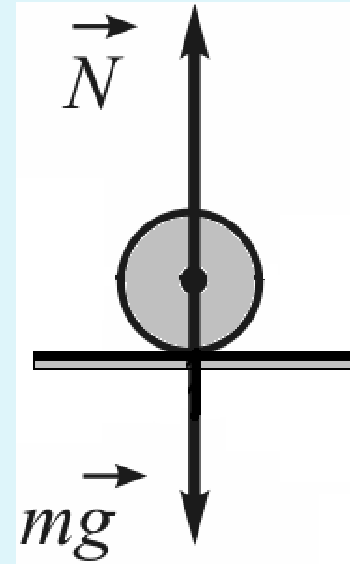
При этом оно обладает минимумом потенциальной энергии в поле силы тяжести и его центр масс занимает самое низкое положение.



Если при отклонении тела от положения равновесия результирующая внешних сил увеличивает начальное отклонение, то равновесие называется неустойчивым (рис. б) .

Если при смещении тела из положения равновесия результирующая внешних сил остается равной нулю, то равновесие называется безразличным.

В таком равновесии находится, например, шар на горизонтальной плоскости.



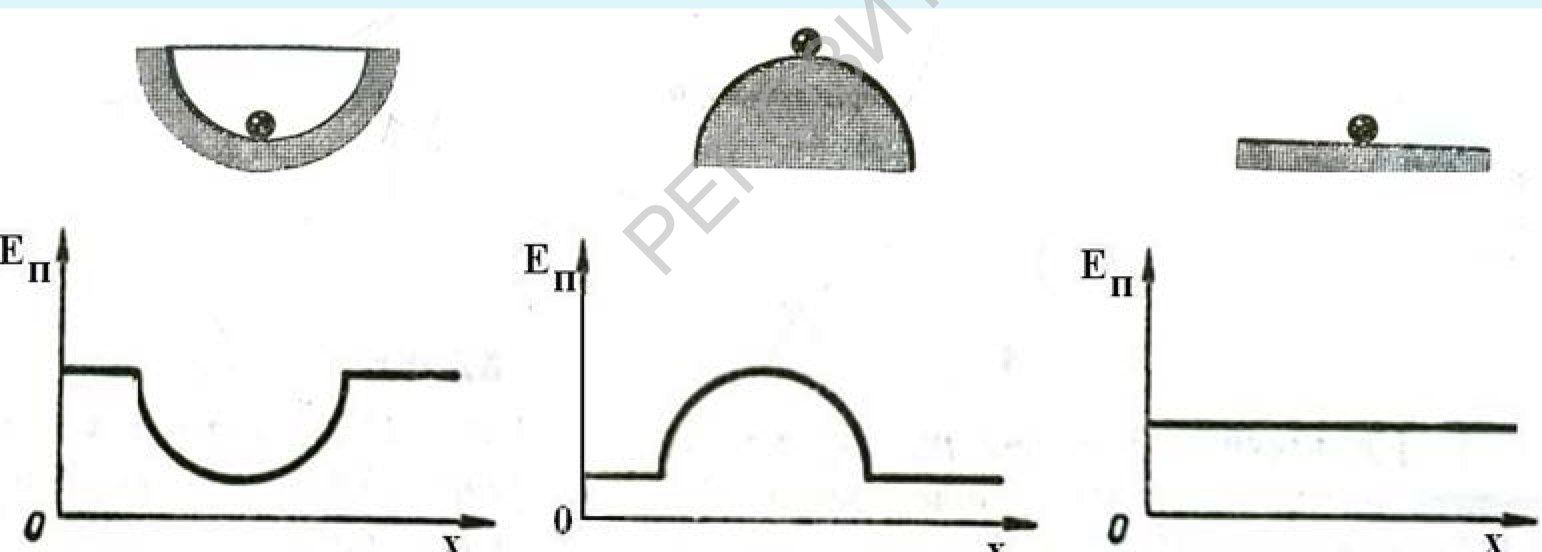


Табл.