Лекция 11. Механика твёрдого тела

Содержание

Поступательное движение абсолютно твердого тела

Абсолютно твердым называется тело, взаимное расположение частиц которого остается неизменным при любых его движениях.

Обычно говорят: «твердое тело», опуская слово «абсолютно».

Различают 5 видов движения тела: поступательное движение, вращательное движение вокруг неподвижной оси, плоскопараллельное движение, вращательное вокруг неподвижной точки, свободное движение.

Любое сложное движение твердого тела может быть сведено к совокупности поступательного и вращательного движений.

Поступательным называется движение, при котором прямая, соединяющая две любые точки тела, перемещается параллельно самой себе.

При этом все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{a}$.

Поступательное движение может быть не только прямолинейным, но и криволинейным, и в этом случае все точки тела также описывают одинаковые траектории.

Движение твердого тела называется плоским (или плоскопараллельным), если любая его точка движется в одной плоскости.

При этом траектория каждой точки тела также лежит в одной плоскости, плоскости всех траекторий совпадают или параллельны.

Например, кузов и колеса автомобиля совершают плоское движение, а лопасти вентилятора охлаждения относительно дороги — неплоское.

Для поступательного движения абсолютно твердого тела постоянной массы справедливо такое же уравнение, как и для материальной точки.

При поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, поэтому в задачах кинематики в принципе может быть взята любая из них.

В задачах динамики следует рассматривать движение центра масс.

Вращательное движение абсолютно твердого тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки описывают окружности с центрами, лежащими на одной прямой, называемой осью вращения.

Ось вращения может проходить через тело или лежать вне его.

Радиусы круговых траекторий точек вращающегося тела разные, поэтому в отличие от поступательного движения их перемещения $\Delta\vec{r}_i$, линейные скорости $\vec{\upsilon}_i$ и ускорения $\vec{a}_i$ зависят от расстояний до оси вращения и являются неудобными характеристиками вращательного движения.

Одинаковыми для всех точек вращающегося твердого тела будут угол поворота φ , угловая скорость ω и угловое ускорение ε .

Взятые для какой-нибудь одной точки, они характеризуют вращение всего тела.

Выделяют случаи вращательного движения вокруг неподвижной и подвижной осей.

Твердое тело может участвовать сразу в нескольких движениях.

Рассмотрение сложных движений упрощается с введением понятия мгновенной оси вращения.

Мгновенной осью вращения называют ось, скорость которой в данный момент времени относительно неподвижной системы отсчета равна нулю.

Положение этой оси относительно неподвижной системы с течением времени изменяется, но в каждый момент всегда найдется неподвижная ось.

Она и будет мгновенной осью вращения.

Это возможно в том случае, если ее положение изменяется и относительно самого тела.

Например, при качении без скольжения диска или цилиндра по поверхности стола точки соприкосновения в каждый момент времени имеют нулевую относительную скорость.

Совокупность этих точек и является мгновенной осью; она совпадает с образующей цилиндра.

При вращательном движении линейные кинематические характеристики — пройденный путь S , линейная скорость υ , тангенциальное ускорение a_τ — пропорциональны соответствующим угловым характеристикам, причем коэффициентом пропорциональности является радиус вращения r .

Радиус играет важную роль и в динамике вращательного движения тела.

Момент силы

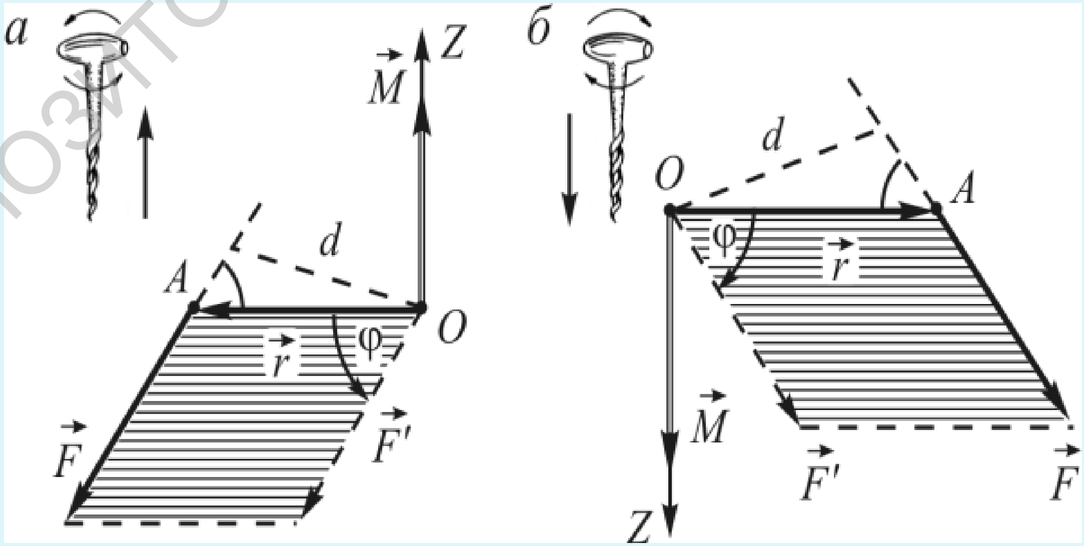
В качестве силовой характеристики вращательного движения вводится понятие **момента силы**.

Следует отличать моменты силы относительно оси и относительно точки.

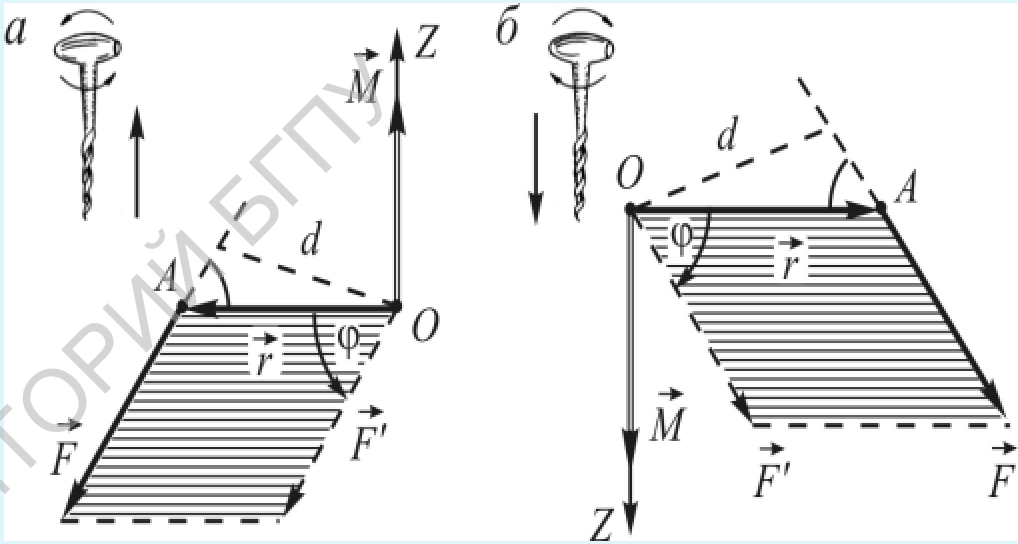
Моментом силы относительно точки О называется векторное произведение

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F} \right]$$

где $\vec{r}$ — **радиус-вектор**, проведенный из этой точки к точке приложения силы.



Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются данные векторы $M = rF\sin\varphi$.

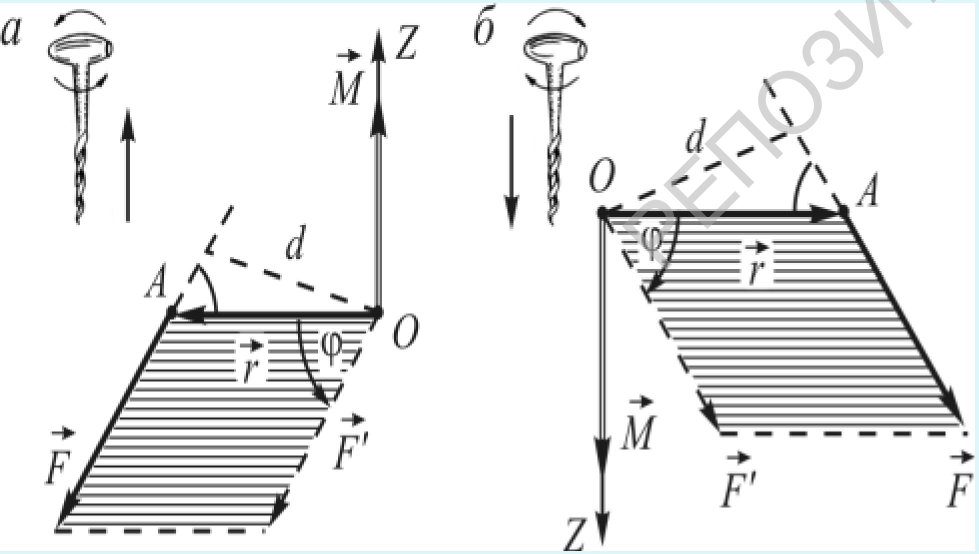


Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу векторного произведения: если совместить точки приложения векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, то кратчайший поворот от радиуса-вектора $\vec{r}$ к силе $\vec{F}$ будет происходить по часовой стрелке, если смотреть вслед вектору $\vec{M}$.

На практике удобно определять направление вектора $\vec{M}$ по правилу правого винта: если вращать головку винта в направлении действия силы, то его поступательное движение покажет направление момента силы $\vec{M}$.

Моментом силы относительно некоторой оси называют проекцию M_z на данную ось вектора момента этой силы $\vec{M}$ относительно любой точки, лежащей на оси.

Величина M_z не зависит от выбора точки O' на оси, поскольку момент силы M при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия не изменяется.



Из рисунка видно, что момент силы относительно точки О численно равен моменту этой силы относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (а значит и точка О).

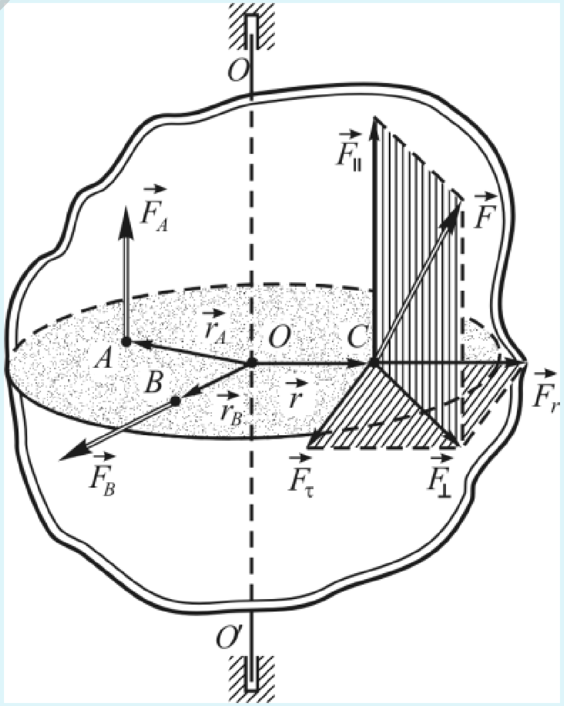
Назовем плечом силы кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы $d = r\sin\varphi$.

Тогда момент силы относительно этой оси может быть определен как произведение силы и плеча $M = Fd$.

Такое определение момента силы дается в элементарной физике.

При этом положительными считаются те моменты сил, которые вызывают вращение по часовой стрелке, а отрицательными — вызывающие вращение против часовой стрелки.

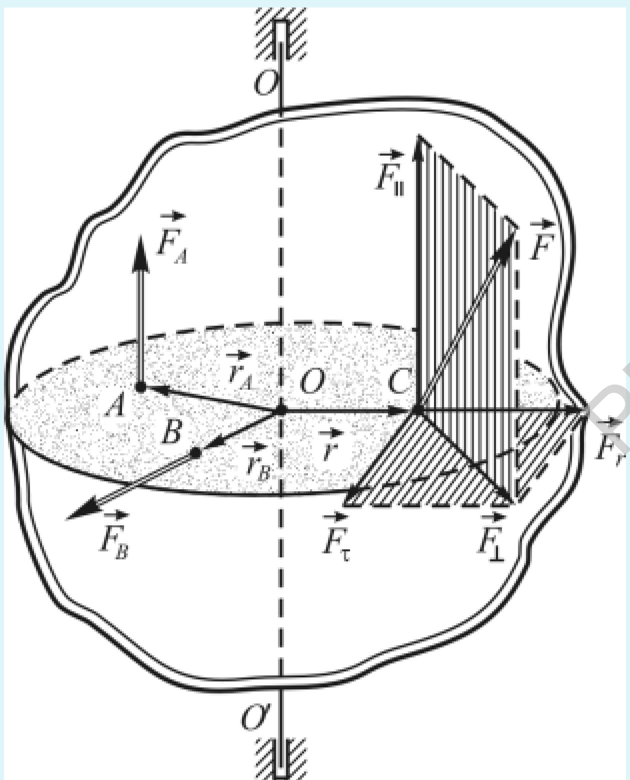
Рассмотрим действие сил на тело, способное вращаться вокруг неподвижной оси OO'.



Сразу заметим, что не всякая сила будет вызывать вращение.

Так, сила $\vec{F}_A$, параллельная оси, может только деформировать эту ось.

Не вызовет вращения и сила $\vec{F}_B$, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения, если линия, вдоль которой она действует, проходит через эту ось, т. е. совпадает по направлению с радиусом-вектором $\vec{r}_B$, проведенным в точку ее приложения B .



Вызвать вращение тела вокруг неподвижной оси может только сила или ее составляющая, которая лежит в плоскости, перпендикулярной данной оси, и не совпадает по направлению с радиусом-вектором, проведенным в этой плоскости к точке ее приложения.

Силу, образующую произвольный угол с осью вращения, можно спроецировать на перпендикулярную плоскость, а затем разложить на тангенциальную $\vec{F}_\tau$ и радиальную $\vec{F}_r$ составляющие.

Именно тангенциальная составляющая силы создает момент относительно оси

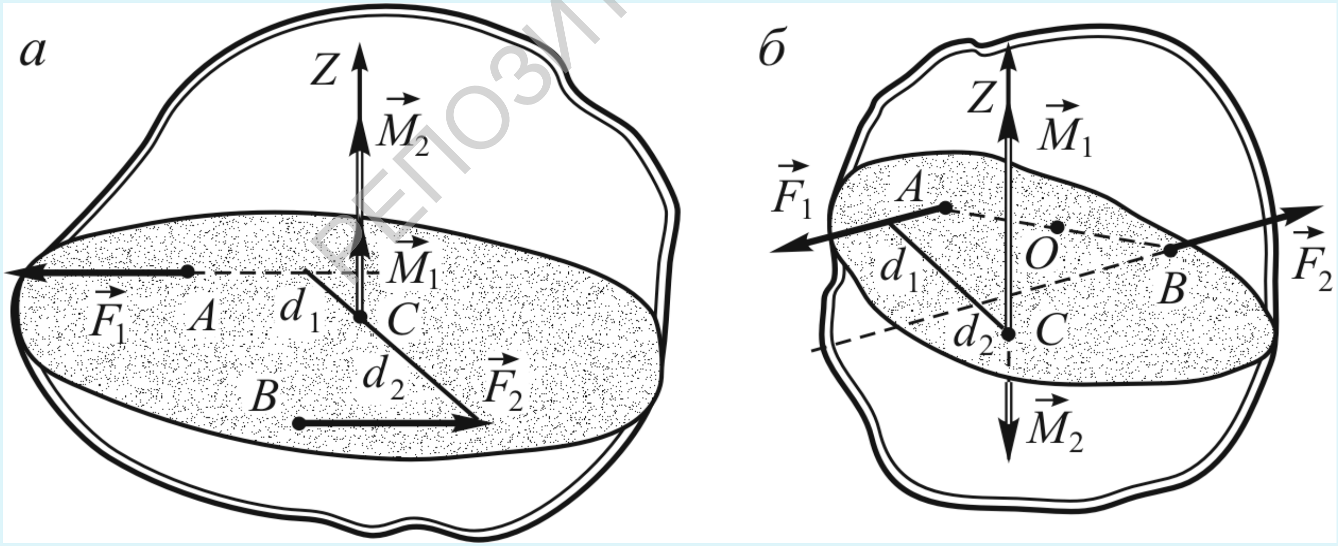
$$M = F_\tau r$$

и является причиной тангенциального ускорения точки тела, к которой она приложена, т. е. вызывает изменение модуля линейной скорости этой точки при вращательном движении.

Пара сил

Система двух параллельных сил одинаковой величины, но противоположного направления, не лежащих на одной прямой и приложенных в различных точках, называется парой сил.

Рассмотрим характер движения свободного тела под действием пары сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных в точках A и B (рис. *а*).



Поскольку силы равны и противоположно направлены $(\vec{F}_1 = -\vec{F}_2)$, то они лежат в одной плоскости и их сумма равна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

В соответствии с уравнением динамики поступательного движения абсолютно твердого тела центр масс остается неподвижным или сохраняет равномерное прямолинейное движение ($\vec{a}_c = 0$).

Таким образом, пара сил не может изменить поступательного движения тела, но она вызывает вращение вокруг оси CZ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы (в данном случае против часовой стрелки, если смотреть с вершины оси CZ).

Вдоль этой же оси направлен суммарный момент данных сил:

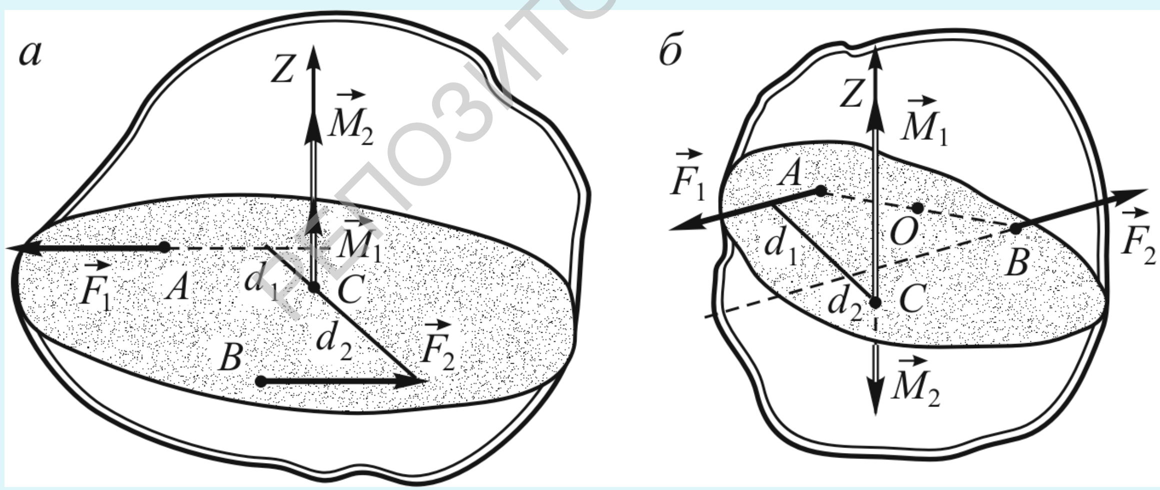
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad .$$

Для сил, лежащих по разные стороны центра масс, численное значение суммарного момента

$$M = M_1 + M_2 = F_1 d_1 + F_2 d_2 = Fd \quad ,$$

где d_1 и d_2 — плечи сил.

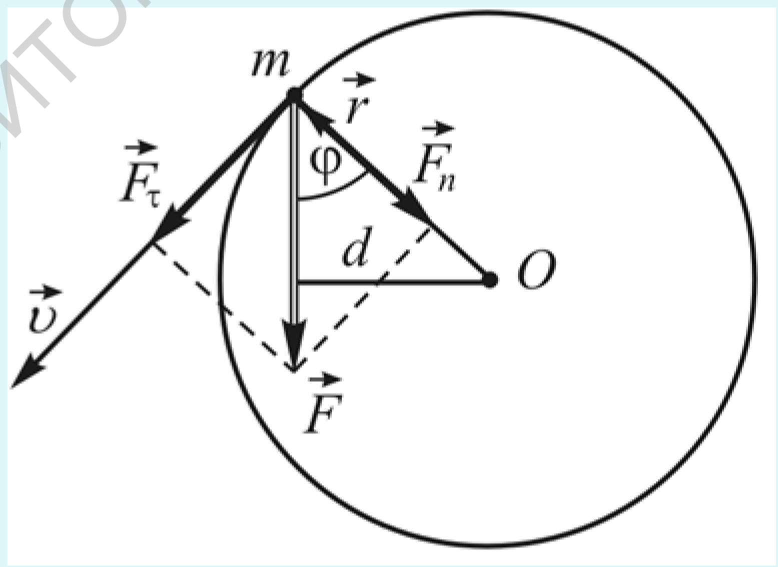
Расстояние между линиями действия сил называют плечом пары. В данном случае $d = d_1 + d_2$.



Момент инерции

Рассмотрим сначала движение одной материальной точки массой m по окружности радиуса r под действием силы $\vec{F}$.

Пусть сила $\vec{F}$ лежит в плоскости чертежа, тогда движение точки будет плоским и может рассматриваться как вращение или вокруг центра O , или вокруг оси OZ , проходящей через этот центр перпендикулярно плоскости чертежа.

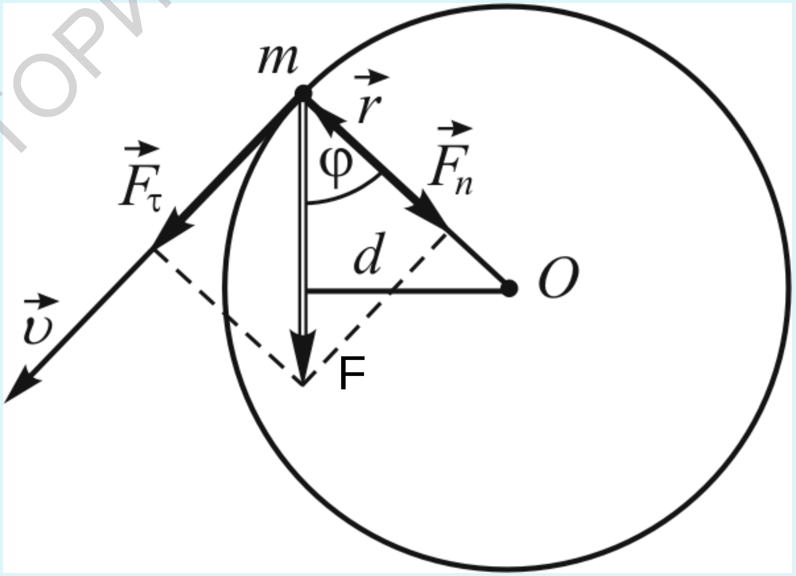


Тангенциальная составляющая сил $F_\tau = F\sin\varphi$ сообщает точке тангенциальное ускорение a_τ, которое согласно второму закону Ньютона $ma_\tau = F\sin\varphi$.

Выразим a_τ через угловое ускорение ($a_\tau = \varepsilon r$) и, умножив обе части последнего равенства на r, получим:

$$mr^2\varepsilon = Fr\sin\varphi \; .$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой момент силы M относительно центра O (или относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости чертежа).



Величина, равная произведению массы точки и квадрата расстояния от нее до оси вращения, называется моментом инерции точки относительно этой оси

$$I = mr^2 .$$

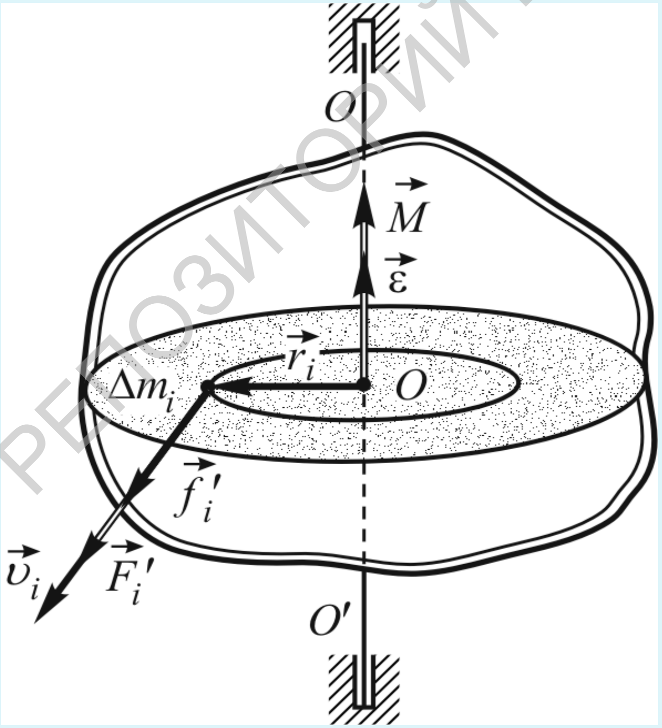
При использовании момента силы и момента инерции равенство $mr^2\varepsilon = Fr\sin\varphi$ принимает вид:

$$I\varepsilon = M .$$

Сравнивая это выражение со вторым законом Ньютона для поступательного движения, приходим к выводу, что при описании вращательного движения с помощью углового ускорения роль массы выполняет момент инерции, а роль силы — момент силы.

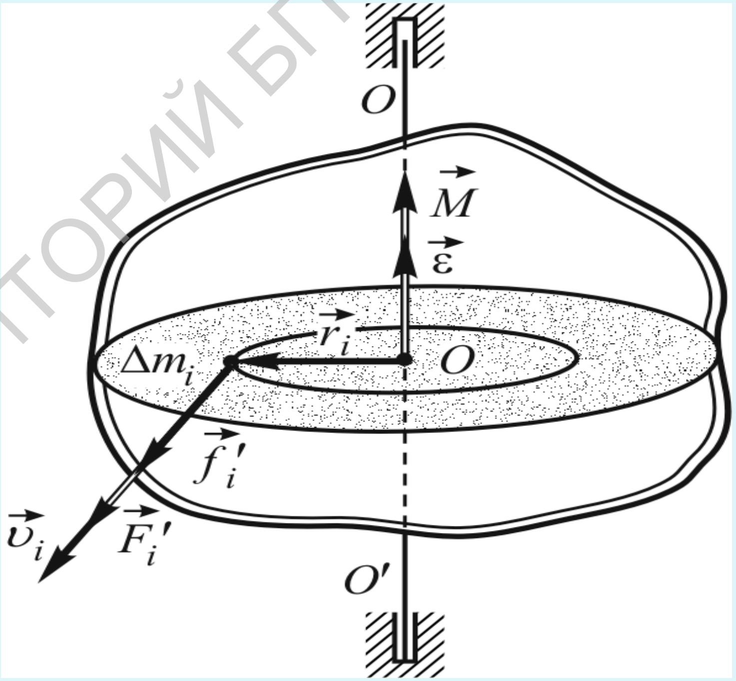
Уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси

Установим теперь связь между угловым ускорением и моментом сил, действующих на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.



Разобьем мысленно тело на малые элементы массами Δm_i , которые можно считать материальными точками, т. е. будем рассматривать твердое тело как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними.

При вращении тела вокруг неподвижной оси OO' его точки двигаются по окружностям радиусов r_i , которые лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

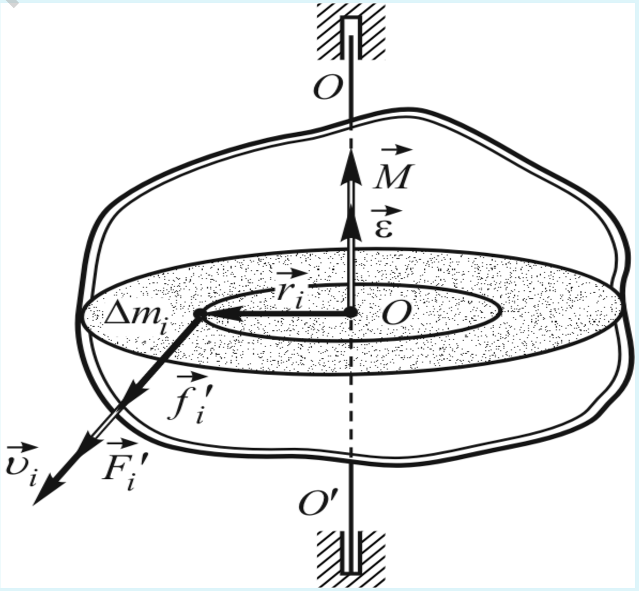


Пусть на каждую точку действует внешняя сила $\vec{F}_i$ и сумма внутренних сил $\vec{f}_i = \sum\limits_j \vec{f}_{ij}$ со стороны остальных частиц системы.

Поскольку точки движутся по плоским окружностям с тангенциальными ускорениями $a_{\tau i}$, то это ускорение вызывают касательные составляющие сил F_i' и f_i'.

Запишем второй закон Ньютона для тангенциального ускорения i-й точки

$$\Delta m_i a_i = F_i' + f_i' \; .$$



$$\Delta m_i a_i = F_i' + f_i'.$$

Умножив обе части этого равенства на r_i и выразив тангенциальные ускорения точек через угловое, одинаковое для всех точек тела ($a_i = r_i \varepsilon$), получим:

$$\Delta m_i r_i^2 \varepsilon = r_i F_i' + r_i f_i' .$$

Просуммируем по всем точкам системы, учитывая, что сумма моментов всех внутренних сил равна нулю.

Действительно, все внутренние силы можно сгруппировать на попарно равные и противонаправленные.

Силы каждой пары лежат на одной прямой, поэтому имеют одинаковые плечи, а значит равные, но противонаправленные моменты.

В результате получаем уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси как системы материальных точек

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \varepsilon = \sum_i r_i F_i'.$$

Сумма моментов внешних сил, действующих на тело, равна моменту результирующей этих сил относительно оси OO'

$$M = \sum_i r_i F_i'.$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси называют сумму моментов инерции всех его точек относительно той же оси:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 .$$

С учетом полученных соотношений, определяющих понятия момента инерции тела I и суммарного момента сил M, имеем:

$$I\varepsilon = M \quad .$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела совпадает по направлению с вектором момента сил $\vec{M}$ относительно неподвижной оси, а момент инерции тела — величина скалярная, следовательно, предыдущее уравнение можно записать в векторной форме:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

. Из этого уравнения выразим угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad .$$

Полученное соотношение называют уравнением динамики или вторым законом Ньютона для вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Отличие от поступательного движения заключается в том, что вместо линейного ускорения $\vec{a}$ используется угловое $\vec{\varepsilon}$, роль силы $\vec{F}$ выполняет момент силы $\vec{M}$, а роль массы m — момент инерции I.

В динамике поступательного движения равными силами считаются те, которые сообщают телам равной массы одинаковые ускорения.

При вращательном движении одна и та же сила может сообщать телу разные угловые ускорения в зависимости от того, как далеко лежит линия действия силы от оси вращения.

Поэтому, например, велосипедное колесо легче привести в движение, прикладывая силу к ободу, чем к середине спицы.

Разные тела получают под действием одинаковых моментов сил одинаковые угловые ускорения, если равны их моменты инерции.

Момент инерции зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения.

Поскольку угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции, то при прочих равных условиях тело легче привести в движение, если его масса сконцентрирована ближе к оси вращения.