Лекция 10. Энергия системы материальных точек

Содержание

Закон сохранения механической энергии в консервативной системе

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из **n** материальных точек, массы которых $m_1, m_2, \ldots m_n$.

Пусть к некоторому моменту времени под действием приложенных сил скорости точек соответственно равны $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots, \vec{\upsilon}_n$.

Примем, что в данной механической системе могут действовать внутренние консервативные силы взаимодействия между частицами, а также внешние как консервативные, так и диссипативные силы.

Для каждой материальной точки системы запишем второй закон Ньютона:

$$\left.\begin{aligned}
&m_1\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt}=\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\ldots+\vec{f}_{1n}+\vec{F}_1,\\
&m_2\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt}=\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\ldots+\vec{f}_{2n}+\vec{F}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_n\frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}=\vec{f}_{n1}+\vec{f}_{n2}+\ldots+\vec{f}_{n\,n-1}+\vec{F}_n,
\end{aligned}\right\}$$

где $\vec{F}_i$ — результирующая внешняя сила, действующая на i-ю материальную точку;

$\vec{f}_{ik}$ — внутренняя сила, действующая на эту точку со стороны k-й.

Пусть все материальные точки за интервал времени dt совершают перемещения $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$.

Умножив скалярно каждое уравнение системы на соответствующее перемещение, и учитывая, что $\vec{\upsilon}_i = d\vec{r}_i \,/\, dt$, эту систему можно записать следующим образом:

$$m_1 \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} d\vec{r}_1 = \sum_k \vec{f}_{1k} d\vec{r}_1 + \vec{F}_1 d\vec{r}_1 \quad ,$$

$$m_2 \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} d\vec{r}_2 = \sum_k \vec{f}_{2k} d\vec{r}_2 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 \quad ,$$

....

$$m_n \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt} d\vec{r}_n = \sum_k \vec{f}_{nk} d\vec{r}_n + \vec{F}_n d\vec{r}_n \quad .$$

Ранее было показано , что каждый, стоящий в левой части i-й член предыдущих равенств

$$m_i\left(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i\right)=\frac{d\left(m_i\upsilon_i^2\right)}{2}=dE_{ki}$$

dE_{ki} - есть изменение кинетической энергии i-й материальной точки за интервал времени dt .

Каждый первый член в правой части равенств представляет элементарную работу всех консервативных сил, действующих на i-ю материальную точку и равен изменению потенциальной энергии этой точки за то же время с обратным знаком:

$$\sum_k \vec{f}_{ik}d\vec{r}_i=-dE_{\text{пi}}\,.$$

Поэтому полученную систему уравнений можно представить:

$$dE_{\text{к}1} + dE_{\text{п}1} = \delta A_1 \quad ,$$

$$dE_{\text{к}2} + dE_{\text{п}2} = \delta A_2 \quad ,$$

……………………..

$$dE_{\text{к}n} + dE_{\text{п}n} = \delta A_n \quad ,$$

где $\delta A_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i$ — элементарная работа внешней силы.

Поскольку внешние силы $\vec{F}_i$ могут быть неконсервативными, элементарную работу обозначаем δA_i вместо dA_i .

Суммируя почленно левые и правые части уравнений, получим:

$$\sum_i dE_{\text{к}i} + \sum_i dE_{\text{п}i} = \sum_i \delta A_i \quad (1).$$

Обозначим полную работу внешних сил, под действием которых каждая точка совершает перемещение dr_i, $\delta A = \sum_i \delta A_i$.

Поскольку внутренние силы рассматриваемой системы точек являются консервативными, то в этом случае dE_{Ki} и dE_{ni} обозначают полные дифференциалы функции и знак дифференциала можно вынести за знак суммы.

С учетом этого соотношение принимает вид: $d\left(\sum_i E_{\text{к}i} + \sum_i E_{\text{п}i}\right) = \delta A$

Очевидно, что кинетическая и потенциальная энергия системы равна сумме соответствующих энергий всех ее точек: $E_K = \sum_i E_{Ki}$ и $E_\Pi = \sum_i E_{\Pi i}$.

Следовательно, $d\left(E_\text{к} + E_\text{п}\right) = \delta A$.

Обозначив полную механическую энергию системы $E = E_K + E_П$, соотношение примет следующий вид: $dE = \delta A$, или для конечных изменений, $E_2 - E_1 = A_{12}$.

Это означает, что при переходе механической системы из одного состояния с энергией E_1 в другое с энергией E_2 внешние силы совершают работу A_{12} .

Если консервативная механическая система не замкнута, то изменение ее механической энергии равно работе, которая выполняется внешними силами.

Это формулировка закона сохранения энергии для незамкнутых консервативных систем.

Если внешние силы на механическую систему не действуют, то в этом случае:

$$d\left(E_к + E_п\right) = 0 \ .$$

Из равенства $d\left(E_{\text{к}} + E_{\text{п}}\right) = 0$ следует, что $\boxed{E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \text{const}}$.

Полученное выражение представляет собой аналитическую форму записи закона сохранения механической энергии для консервативной системы:

сумма кинетической и потенциальной энергий замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Внутренняя энергия. Общая формулировка закона сохранения механической энергии

Если в замкнутой системе между телами действуют диссипативные силы, например, силы трения и силы сопротивления среды, то часть энергии механического движения переходит во внутреннюю энергию тел.

При переходе одной формы движения в другую уменьшается энергия одной формы движения и настолько же возрастает энергия другой.

На основе опытных данных можно сформулировать закон сохранения энергии, который имеет всеобщий характер.

Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь преобразуется из одного вида в другой.

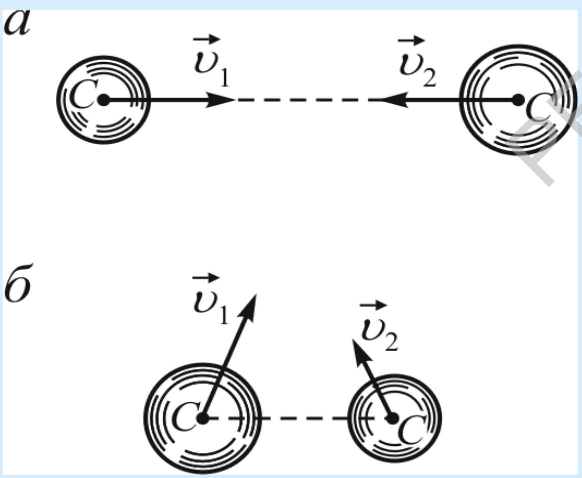
Этот результат является проявлением неуничтожимости материи и ее движения.

Применение законов сохранения импульса и энергии при анализе упругого и неупругого ударов

Применение законов сохранения импульса и энергии позволяет значительно упростить решение большого числа задач механики по сравнению с решением их с помощью уравнений движения.

В качестве примера решения задач такого рода может служить задача о соударении шаров.

Ударом называется кратковременное взаимодействие, возникающее при столкновении движущихся твердых тел, которое приводит к значительному перераспределению импульсов и энергий этих тел.



Линией удара называется общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения (пунктирная линия на рисунке).

Удар называется прямым, если векторы скоростей тел до удара совпадают с линией удара (рис. а).

Если векторы скоростей тел до удара не совпадают с линией удара, имеет место косой удар (рис. б).

Удар называется центральным, если линия удара проходит через центры масс соударяющихся тел. Для шаров удар всегда центральный.

Различают два предельных типа ударов: абсолютно упругий удар и абсолютно неупругий удар.

Абсолютно упругим называется удар, при котором возникшие в телах деформации после удара полностью исчезают.

При этом типе удара отсутствует рассеивание механической энергии.

Абсолютно неупругим называется удар, после которого возникшие в телах деформации полностью сохраняются. После такого удара тела движутся с одинаковой скоростью.

В случае неупругого удара часть механической энергии взаимодействующих тел переходит во внутреннюю энергию.

Обычно различают две фазы упругого удара.

Первая фаза — с момента столкновения тел до момента, когда их относительная скорость становится равной нулю.

С момента возникновения деформаций в месте столкновения тел начинают действовать силы, направленные противоположно относительным скоростям тел.

Эти силы уменьшают скорости тел до тех пор, пока их относительная скорость не станет равной нулю.

При этом происходит переход энергии механического движения в энергию упругой деформации и частично во внутреннюю энергию.

С момента, когда относительная скорость тел становится равной нулю, начинается вторая фаза удара.

Силы упругости продолжают действовать в прежнем направлении, но теперь они вызывают увеличение скорости в направлении, противоположном первоначальному.

В этой фазе удара кинетическая энергия тел возрастает за счет работы упругих сил.

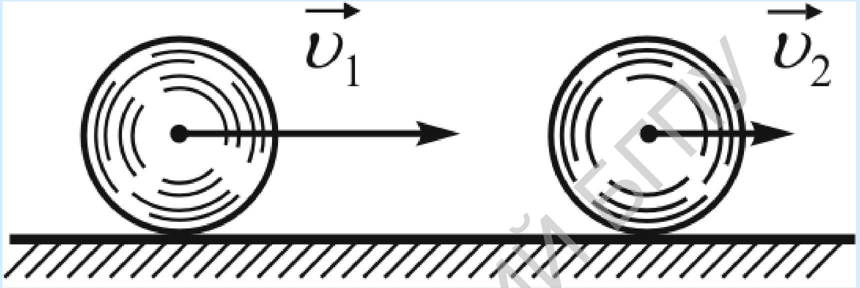
Рассмотрим абсолютно упругий, центральный, прямой удар двух шаров.

Будем рассматривать шары как замкнутую систему. Для этого необходимо обеспечить такие условия, при которых внешние силы имели бы минимальные влияния.

Этого максимально можно достичь в случае, если шары будут катиться по гладкой горизонтальной поверхности (поверхности шаров также должны быть гладкими) или подвешены на бифилярном подвесе.

В первом случае сила тяжести шаров уравновешивается упругой силой давления поверхности, а силой трения качения можно пренебречь.

Пусть шары массами m_1 и m_2 движутся поступательно со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, направленными в одну и ту же сторону вдоль линии их центров, причем $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$.



Найдем модуль скорости шаров **u** после удара.

Для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения импульса и механической энергии

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 ,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} .$$

Поскольку при прямом ударе векторы $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2 \quad \vec{u}_1 \; \vec{u}_2$ направлены вдоль одной прямой, то соотношение для проекций импульсов шаров на эту прямую будет иметь вид:

$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1 u_1+m_2u_2.$$

В результате преобразований получаем:

$$m_1(\upsilon_1^2-u_1^2)=m_2(u_2^2-\upsilon_2^2),$$

$$m_1(\upsilon_1-u_1)=m_2(u_2-\upsilon_2).(1)$$

Разделив почленно последние равенства, получим:

$$\upsilon_1+u_1=u_2+\upsilon_2.\ (2)$$

Умножив соотношение (2) на m_1 и сложив с равенством (1), найдем скорость второго шара после удара

$$u_2=\frac{\upsilon_2(m_2-m_1)+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}.$$

Тогда скорость первого шара после удара

$$u_1 = \frac{\upsilon_1 \left(m_1 - m_2\right) + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

1. Пусть массы шаров одинаковы: **m $_1$= m $_2$= m** .

В этом случае $u_1 = \upsilon_2$, $u_2 = \upsilon_1$, т. е. при ударе шары обмениваются скоростями.

Если второй шар до удара находился в состоянии покоя ($\upsilon_2 = 0$), то первый шар после удара останавливается, а второй начинает двигаться со скоростью, которую имел первый шар, в том же направлении.

2. Рассмотрим случай, когда масса второго шара намного больше массы первого шара $m_2 >> m_1$.

Формулы для u_1 и u_2 преобразуем следующим образом:

$$u_1 = \frac{\upsilon_1\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) + 2\upsilon_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \qquad u_2 = \frac{\upsilon_2\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) + 2\upsilon_1\frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

Если $m_2 >> m_1$, то отношение m_1 / m_2 стремится к нулю и скорости шаров после удара:

$$u_1 \approx -\upsilon_1 + 2\upsilon_2 \quad \text{и} \quad u_2 \approx \upsilon_2 .$$

Скорость шара большей массы практически остается неизменной при ударе.

Если $\upsilon_2 = 0$ и $u_1 = -\upsilon_1$, т. е.шар меньшей массы отскакивает от большего шара с той же скоростью, с какой он двигался до удара, но в противоположном направлении.

Последний вывод можно применить к случаю упругого удара шара о неподвижную стенку при движении его перпендикулярно стенке.

При этом изменение импульса шара

$$m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{\upsilon}_1 = -m_1\vec{\upsilon}_1 - m_1\vec{\upsilon}_1 = -2m_1\vec{\upsilon}_1 .$$

Стенка в результате взаимодействия с шаром получит равный по величине, но противоположно направленный импульс силы.

3. Стенка движется со скоростью υ_2 .

Шар ударяется перпендикулярно стенке, нагоняя ее. В этом случае $u_2 \approx \upsilon_2$, $u_1 = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 - 2\upsilon_2)$.

После удара шар, изменив направление на противоположное, движется медленней, чем до удара.

Если $\upsilon_2 = \upsilon_1 / 2$, то шар после удара останавливается.

На этом основан прием, который используют жонглеры, когда ловят шар или мяч на трость или какой-нибудь другой предмет.

4. Стенка движется со скоростью $-\upsilon_2$ навстречу шару.

В этом случае $u_1 = -\upsilon_1 - 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 + 2\upsilon_2)$.

Шар отскакивает от стенки всегда в обратном направлении со скоростью большей, чем до удара.

Теннисист, отбивая ракеткой летящий мяч, возвращает его противнику с еще большей скоростью.

Рассмотрим теперь абсолютно неупругий удар двух шаров.

Пусть два шара массами m_1 и m_2, которые имели до удара скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после удара движутся с общей скоростью $\vec{u}_1$.

Удар будем считать центральным и прямым, а систему соударяющихся тел в момент удара замкнутой.

Согласно закону сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Из этой формулы найдем скорость шаров после удара

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку удар прямой, то векторы скоростей лежат на одной прямой.

Проекции векторов скоростей на эту линию равны модулям скоростей, а направления их учитываются алгебраическими знаками.

Примем данную прямую за ось X и спроецируем векторное уравнение $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u}$ на эту ось.

Получим скалярное уравнение, из которого найдем скорость шаров после удара:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Если шары до удара двигались в одну сторону, то после удара будут двигаться в ту же сторону.

Если шары до удара двигались навстречу друг другу, то после удара они будут двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, имеющий больший импульс.

Поскольку при неупругом ударе часть энергии механического движения расходуется на работу деформации, то кинетическая энергия шаров после удара уменьшается.

Определим ту часть кинетической энергии, которая расходуется на работу деформации, $\Delta E_{к} = E_{к2} - E_{к1}$,

где $E_{к1}$— кинетическая энергия шаров до удара; $E_{к2}$ — кинетическая энергия шаров после удара.

Кинетическая энергия шаров до удара

$$E_{к1} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2},$$

после удара

$$E_{к2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

С учетом формул для E_1 и E_2 получим:

$$\Delta E_{к} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \left(\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}\right).$$

Подставив значение скорости u после удара, в результате преобразований получим:

$$\Delta E = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

Отметим, что полученная формула справедлива, если тела движутся навстречу.

В общем случае нужно вместо $(\upsilon_1 - \upsilon_2)$ поставить $\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|$.

Таким образом, в случае абсолютно неупругого удара полная механическая энергия системы уменьшается (приращение отрицательное).

За счет убыли механической энергии системы осуществляется деформация тел, которая сохраняется и после удара.

Как следует из последней формулы, работа деформации пропорциональна квадрату относительной скорости шаров до удара.

Если скорость второго шара равна нулю , получим следующее выражение для работы деформации:

$$A = -\Delta E = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{к1}.$$

$$A = -\Delta E = \frac{m_1 m_2 \upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{\text{к}1}.$$

Анализируя это соотношение, приходим к выводу: чтобы получить в результате неупругого удара наибольшую работу деформации, необходимо, чтобы масса тела, которое находится в покое, была намного больше массы движущегося тела $(m_2 >> m_1)$.

Данное обстоятельство учитывается при ковке и штамповке деталей.

Если требуется наибольшее перемещение тела после удара, необходимо, чтобы масса движущегося тела была больше массы тела, которое находится в состоянии покоя $(m_1 >> m_2)$.

Это имеет место при забивании свай, гвоздей.

Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары являются идеальными предельными случаями. При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации. Поэтому удар будет частично неупругим.

При абсолютно неупругом ударе относительная скорость тел после удара равна нулю.

При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$k = u_{отн} / \upsilon_{отн}.$$

Данное отношение называют коэффициентом восстановления относительной скорости тел при ударе.

Коэффициент восстановления принимает значения в интервале $0 \le k \le 1$.

При ударе стальных шаров $k = 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $k = 0{,}89$, а для шаров из свинца k близко к нулю.