

# Лекция 8. Движение тела переменной массы

## Содержание

1. Уравнение Мещерского
2. Движение ракет. Формула Циолковского

В природе и технике нередки случаи, когда **масса тел изменяется с течением времени** за счет потери или приобретения вещества.

Так, **масса:**

- метеорита при полете в атмосфере уменьшается в результате отрыва или сгорания его частиц;
- дождевой капли растет при падении в перенасыщенном водяным паром воздухе;
- дрейфующей льдины увеличивается при намерзании и уменьшается при таянии;
- машины для поливки улиц уменьшается при вытекании водяных струй;
- ракеты уменьшается в результате вытекания газов, которые образуются при сгорании топлива, и т. д.

Во всех этих случаях имеют дело с движением тел **переменной массы**.

**Уравнения** движения тел переменной массы являются **следствием законов Ньютона**, тем не менее, эти уравнения представляют самостоятельный интерес, главным образом как теоретическая основа ракетной техники.

Вывод уравнения движения тела переменной массы рассмотрим на примере движения простейшей ракеты.

Будем рассматривать ракету как достаточно малое тело, положение центра масс которого не изменяется по мере сгорания топлива.

В этом случае ее можно считать материальной точкой переменной массы, положение которой совпадает с центром масс.

Будем считать, что вылетающая из ракеты частица газа массой  $dm$  взаимодействует с ней только в момент отделения.

Примем также, что изменение массы ракеты происходит непрерывно, без скачков, т. е. существует производная массы по времени  $dm / dt$ , которая характеризует скорость изменения массы.

Пусть в момент времени  $t$  ракета с топливом имеет массу  $m$ , скорость относительно неподвижной системы отсчета (Земли)  $\vec{v}$  и импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

За время  $dt$  от ракеты отделяется некоторая масса  $dm$  газа, скорость которой относительно ракеты  $\vec{u}$ .

Относительно выбранной неподвижной системы отсчета ее скорость будет  $\vec{u} + \vec{v}$ , а импульс  $d\vec{p} = dm(\vec{u} + \vec{v})$ .

Масса ракеты станет  $m - dm$ , скорость  $\vec{v} + d\vec{v}$ , а импульс  $\vec{p}_p = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v})$ .

В общем случае на ракету будут действовать **внешние силы**, в числе которых силы гравитационного притяжения Земли, Солнца и планет, а также **сила сопротивления** среды, в которой она движется.

В соответствии с основным **законом динамики** изменение импульса системы (ракета—выбрасываемые газы) равно импульсу результирующей внешних сил ( $d\vec{p} = \vec{F} dt$  или

$$(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{u} + \vec{v}) - m\vec{v} = \vec{F} dt .$$

Раскрыв скобки и, пренебрегая произведением  $dmd\vec{v}$  как бесконечно малой величиной высшего порядка, получим:

$$m d\vec{v} + dm\vec{u} = \vec{F} dt .$$

Разделив последнее соотношение на  $dt$ , получим уравнение

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt} .$$

Это **уравнение динамики тела переменной массы** впервые было получено профессором Петербургского политехнического института **Мещерским** и носит его имя.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{dm}{dt} \quad .$$

Сравнивая полученное уравнение со **вторым законом Ньютона**, отметим, что левая часть представляет собой произведение массы и ускорения ракеты.

Следовательно, справа должна стоять **сумма сил**, которые действуют на ракету.

Отсюда приходим к выводу, что **второе** слагаемое в правой части также выражает **силу**.

Для выяснения ее природы рассмотрим случай, когда внешние силы отсутствуют ( $\vec{F} = 0$ ), т. е. система ракета – выбрасываемые газы является замкнутой.

На основе закона сохранения импульса можно утверждать, что суммарный импульс системы остается неизменным.

В этом случае получаем соотношение  $m d\vec{v} = -dm\vec{u}$ , на основе которого можно сделать вывод о том, что ракета получает такое же приращение импульса, как и выбрасываемые газы, только в противоположном направлении.

**Причиной** изменения импульсов отдельных частей замкнутой системы могут быть только **внутренние силы**, действующие между ними.

Таким образом, на ракету со стороны газов действует сила

$$\vec{F}_p = -\vec{u} \frac{dm}{dt} .$$

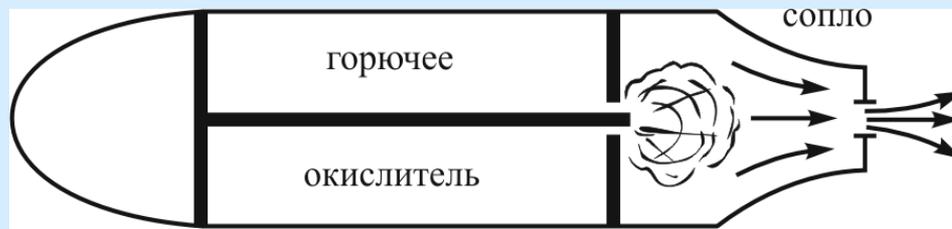
Эта сила называется **реактивной**.

Она прямо пропорциональна скорости изменения массы тела  $dm/dt$  и относительной скорости  $u$  отделяемых частиц и направлена в сторону, противоположную вектору  $\vec{u}$ .

Величину  $\mu = dm/dt$  называют **расходом** газа или жидкости.

Использование **реактивной силы** лежит в основе работы реактивных двигателей, которые делятся на **два** основных класса: **ракетные** и **воздушно-реактивные**.

Единственным двигателем, который обеспечивает управляемое движение аппарата в космическом пространстве, является **ракетный**. Значительную часть массы ракеты занимают горючее и окислитель.



**Реактивная сила** возникает в результате **вытекания** продуктов сгорания через отверстие (сопло), которое сужается для увеличения скорости вытекания .

В ракетах используется как жидкое, так и твердое **топливо**, содержащее в себе горючее и окислитель.

**Воздушно-реактивные** двигатели работают по принципу одновременного присоединения и отделения частиц.

Двигатели этого типа делятся на **турбореактивные** и **прямоточные**.

В носовой части **турбореактивного** двигателя расположен **компрессор**, засасывающий и сжимающий воздух, который затем поступает в **камеру сгорания** и служит окислителем для жидкого горючего, подаваемого с помощью **форсунок**.



Продукты сгорания, проходя через сопло, вращают турбину, которая приводит в действие компрессор.

Прямоточный двигатель не имеет компрессора и газовой турбины. Воздух засасывается исключительно благодаря движению самолета.

Этот двигатель, в отличие от турбореактивного, не создает тяги, когда самолет неподвижный, и может использоваться на сверхзвуковых самолетах в сочетании с двигателями других типов.

Применим уравнение Мещерского к частному случаю движения ракеты, когда на нее не действуют внешние силы.

Движение ракеты происходит под действием только реактивной силы.

Направим ось  $X$  по оси ракеты, совместив ее с направлением полета.

В проекции на эту ось уравнение Мещерского примет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} .$$

Разделив на  $m$  и сокращая  $dt$ , получим:

$$dv = -u dm / m .$$

Для нахождения скорости ракеты через время  $t$  после начала движения проинтегрируем это выражение, учитывая, что за время  $t$  скорость увеличивается от 0 до  $v$ , а масса уменьшается от  $m_0$  до  $m$ :

$$\int_0^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} .$$

Отсюда получаем формулу для расчета конечной скорости ракеты

$$v = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) ,$$

где  $m_0$  — начальная масса ракеты вместе с топливом;  
 $m$  — конечная масса ракеты.

$$v = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right)$$

Эта формула была получена в 1903 г. К.Э. Циолковским и носит его имя.

Из нее следует, что конечная скорость, приобретаемая ракетой при отсутствии внешних сил, не зависит от закона изменения массы и ограничена только отношением начальной и конечной масс ракеты.

Полученная формула позволяет оценить максимальную скорость, которую может развить ракета, если предположить, что внешние силы не действуют.

Предельная относительная скорость  $u_{\max}$  истечения газов через сопло определяется химическим составом и температурой сгорания топлива и обычно не превосходит 3—4 км/с.

Максимальное значение отношения масс  $m_0 / m$  ограничено прочностью конструкции, и для современных материалов ее можно принять  $\approx 10$ .

Тогда предельная скорость простейшей одноступенчатой ракеты не превысит 7 км/с, что меньше первой космической скорости.

Для получения космических скоростей Циолковский предложил использовать **многоступенчатые** ракеты, которые представляют собой несколько «посаженных» друг на друга ракет.

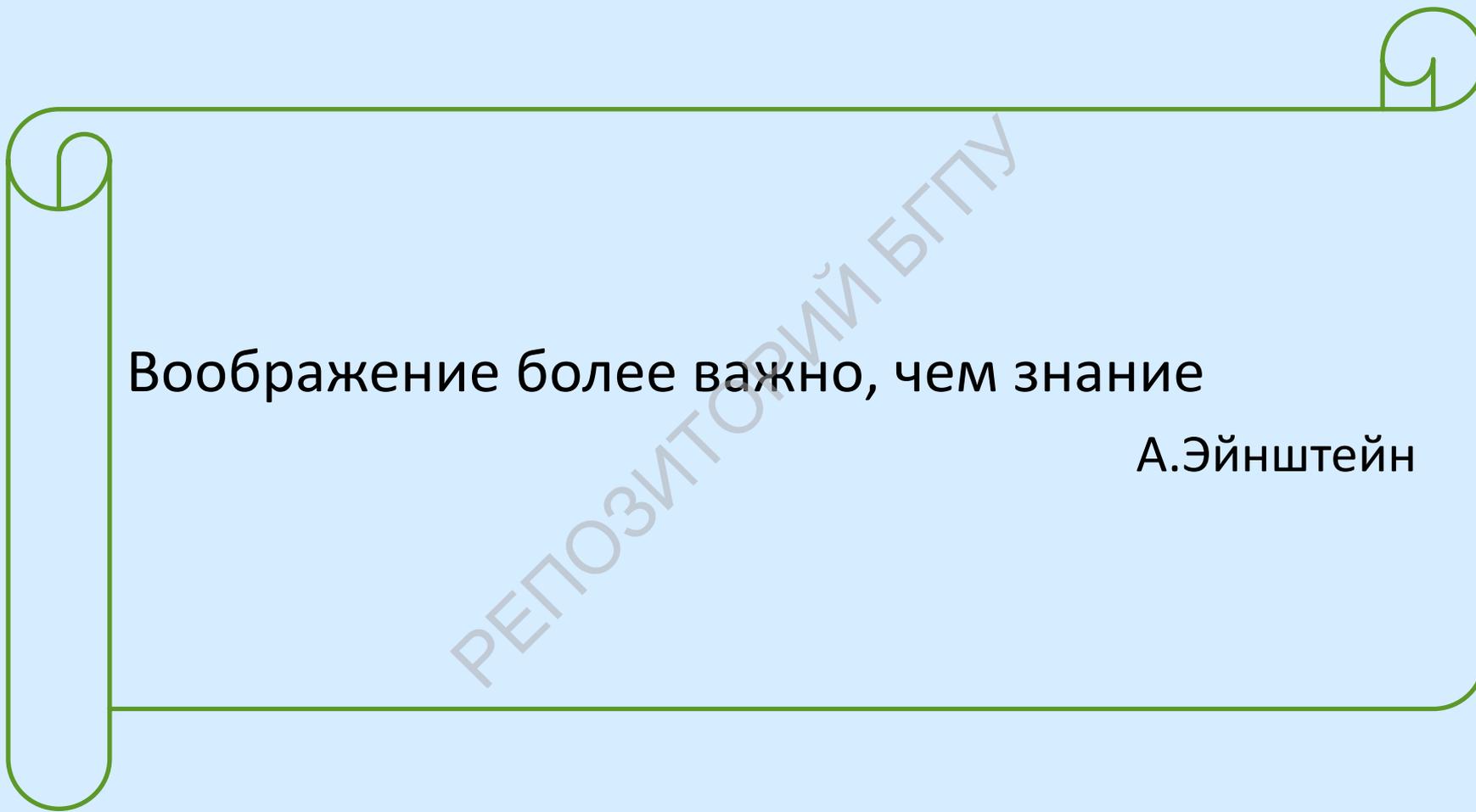
Когда горючее первой ракеты (**ступени**) полностью использовано, она отделяется и начинают работать двигатели **второй** ступени и т. д.

Для запуска космических кораблей и искусственных спутников применяются **трехступенчатые** ракеты.

В настоящее время ведутся интенсивные работы по созданию **новых типов** ракетных двигателей, которые принципиально **отличаются** от твердотельных и жидкостных **реактивных** двигателей.

В **атомных** двигателях рабочее вещество нагревается в ядерном реакторе и затем вытекает через сопло.

В **ионном** ракетном двигателе реактивная сила тяги создается в результате выбрасывания из двигателя заряженных частиц — ионов, которые предварительно **разгоняются** в электрическом поле до **больших скоростей**.



Воображение более важно, чем знание

А.Эйнштейн

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ