Лекция 3. Криволинейное движение

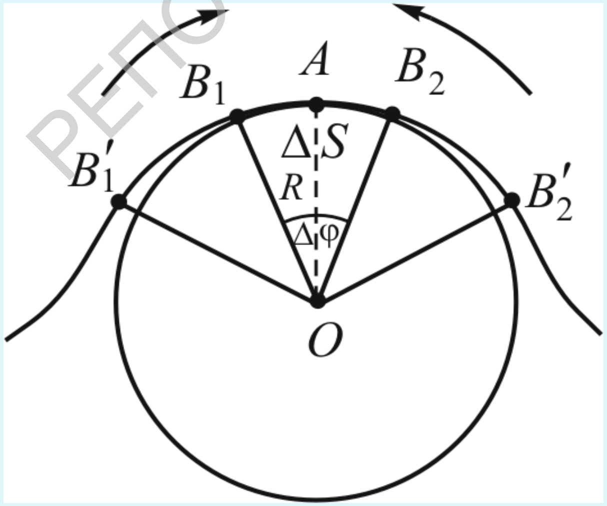
Содержание

Тангенциальное и нормальное ускорения

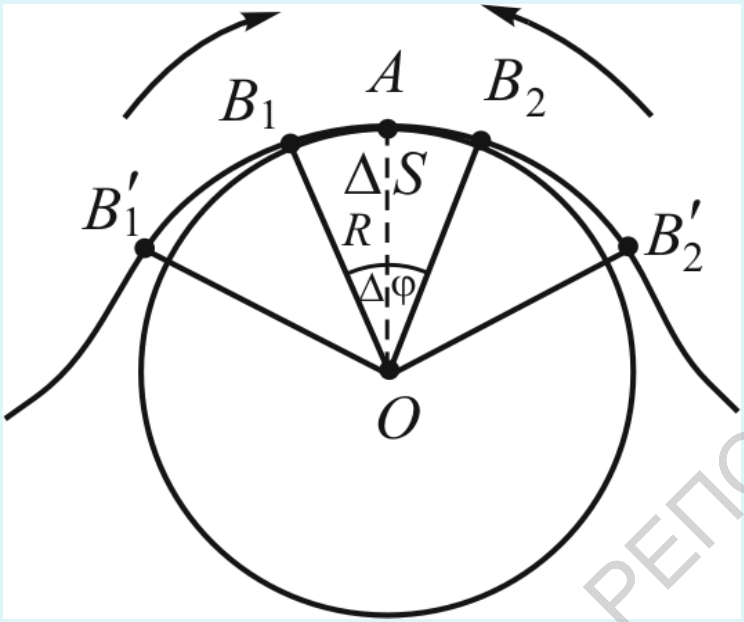
В общем случае криволинейного движения вектор скорости может изменяться как по величине, так и по направлению.

Из математики известно, что любую плавную кривую можно представить состоящей из дуг окружностей.

Действительно, если точки B_1 и B_2 на кривой выбраны достаточно близко, то участок B_1B_2 этой кривой будет близок к некоторой дуге соприкасающейся окружности.



Длина дуги Δs связана с углом $\Delta\varphi$ соотношением $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$, где $R = OA$ - радиус кривизны окружности.

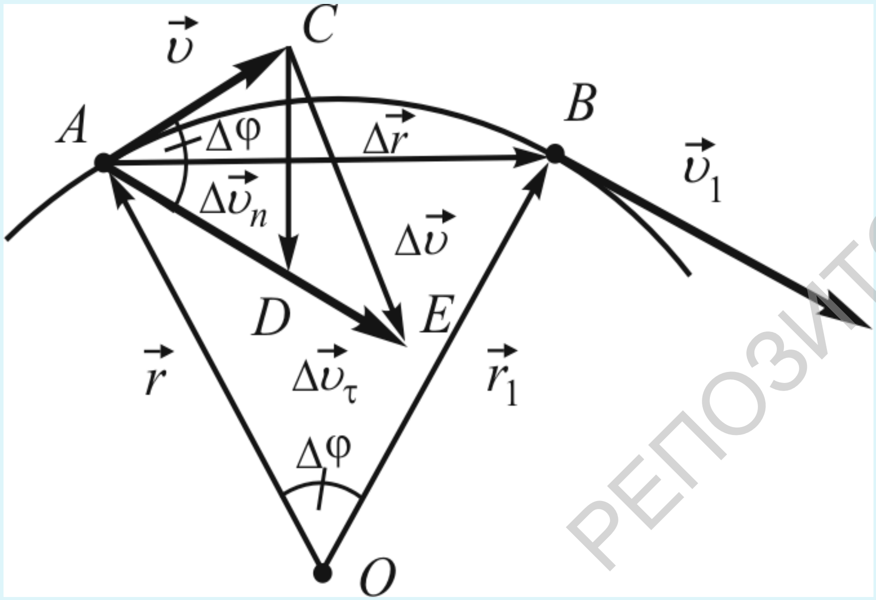


При бесконечном уменьшении угла кривая $B'_1AB'_2$ совпадет с дугой соприкасающейся окружности, откуда радиус кривизны кривой в данной точке

$$R = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

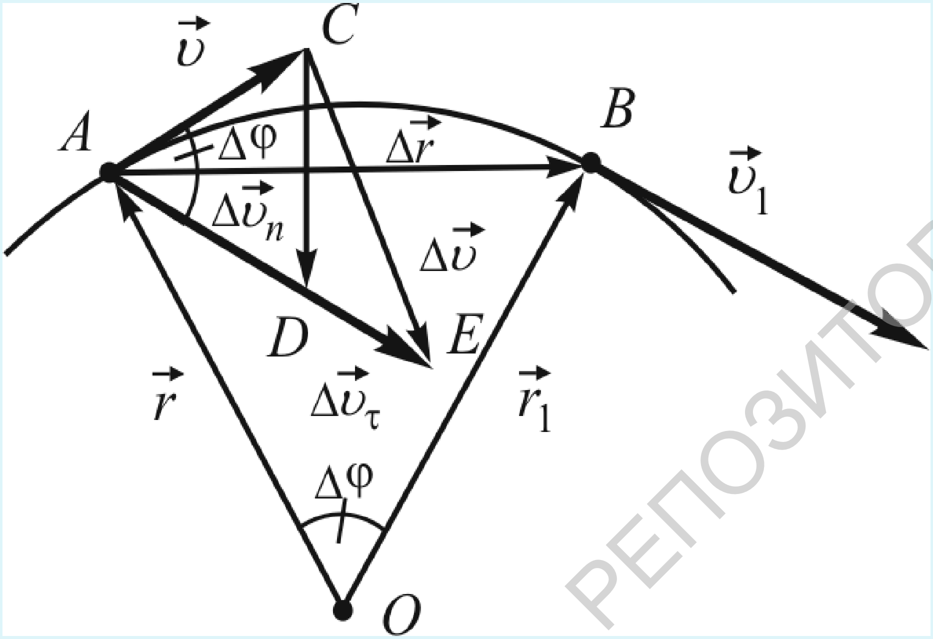
Кривизной плоской кривой в данной точке называется величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности, которая проходит через эту точку и две соседние с ней при их бесконечном сближении

$$\rho = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}.$$



Пусть материальная точка, имевшая в положении A скорость $\vec{\vartheta}$ и радиус-вектор $\vec{r}$, за небольшой интервал времени Δt совершила перемещение $\Delta\vec{r}$ и оказалась в точке B, положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_1$.

При этом ее скорость изменилась как по величине, так и по направлению, и определяется вектором $\vec{\vartheta}_1$.



Перенесем этот вектор в точку А (отрезок АЕ) и построим вектор $\Delta\vec{\vartheta}$, равный изменению вектора скорости

$$\Delta\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_1 - \vec{\vartheta}$$

(вектор $\vec{CE}$).

Как уже отмечалось, среднее ускорение

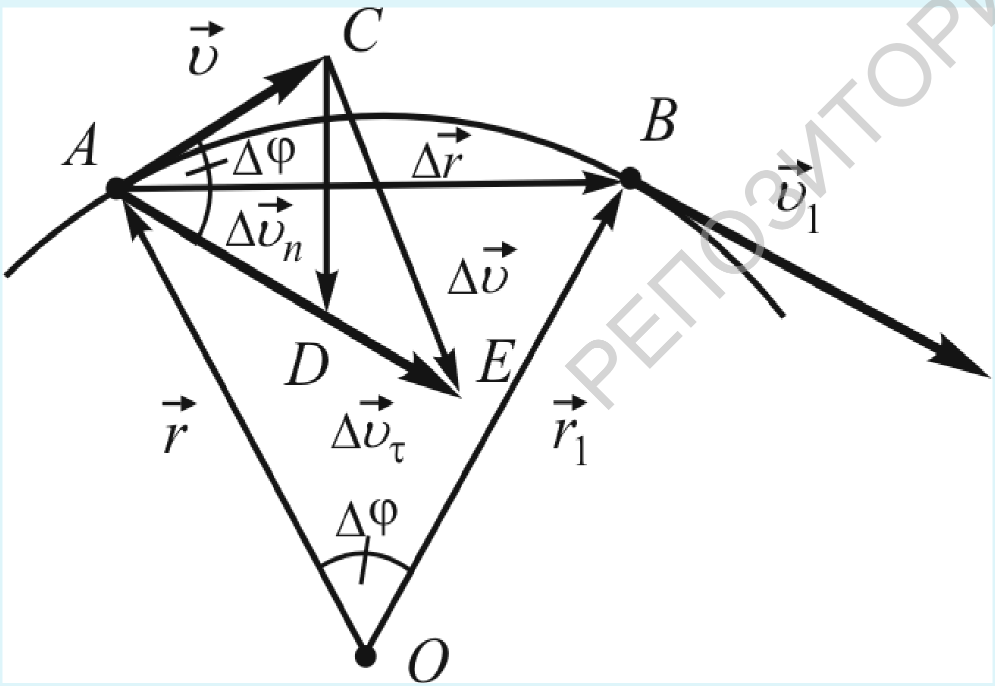
$$<\vec{a}> = \Delta\vec{\vartheta} / \Delta t$$

характеризует изменение вектора скорости за некоторый интервал времени Δt.

Рассмотрим отдельно изменения модуля и направления вектора $\vec{\upsilon}$.

На отрезке AE отложим отрезок AD, численно равный модулю вектора $\vec{\upsilon}$, и соединим прямой точку C с точкой D.

Приращение вектора скорости может быть представлено в виде суммы двух векторов: $\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n$.



Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ численно характеризует изменение модуля вектора скорости за время Δt

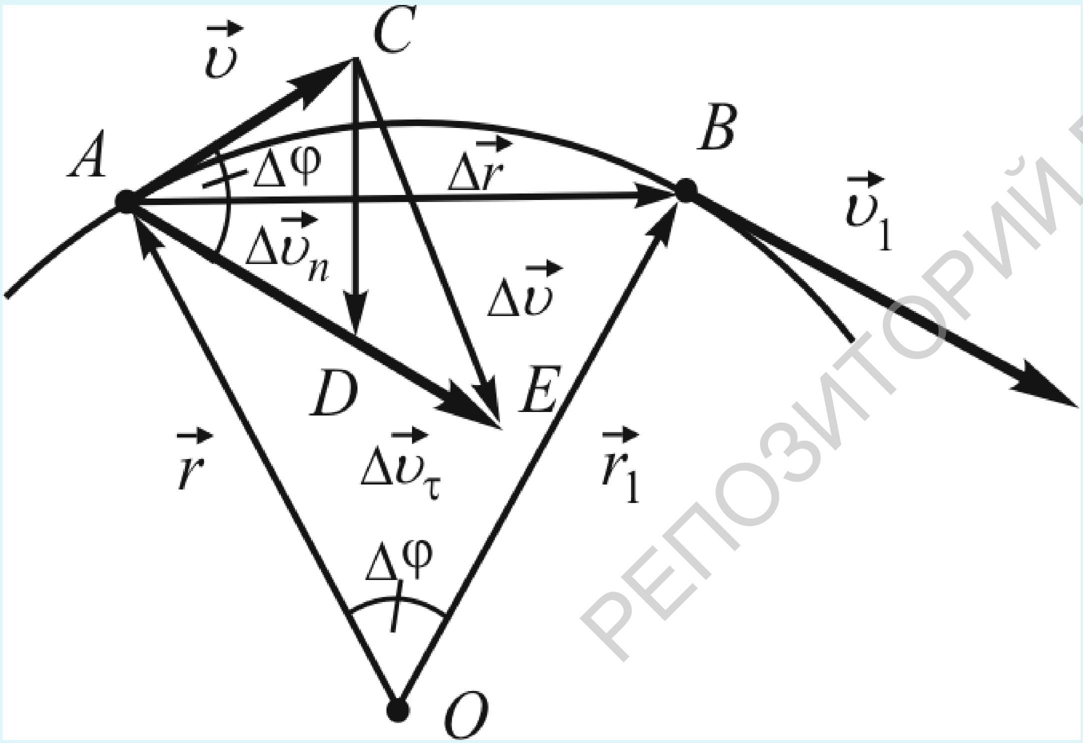
$$\left|\Delta\vec{\upsilon}_\tau\right| = \upsilon_1 - \upsilon = \Delta\upsilon.$$

При бесконечном уменьшении Δt модуль соответствующего ускорения определяется формулой

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

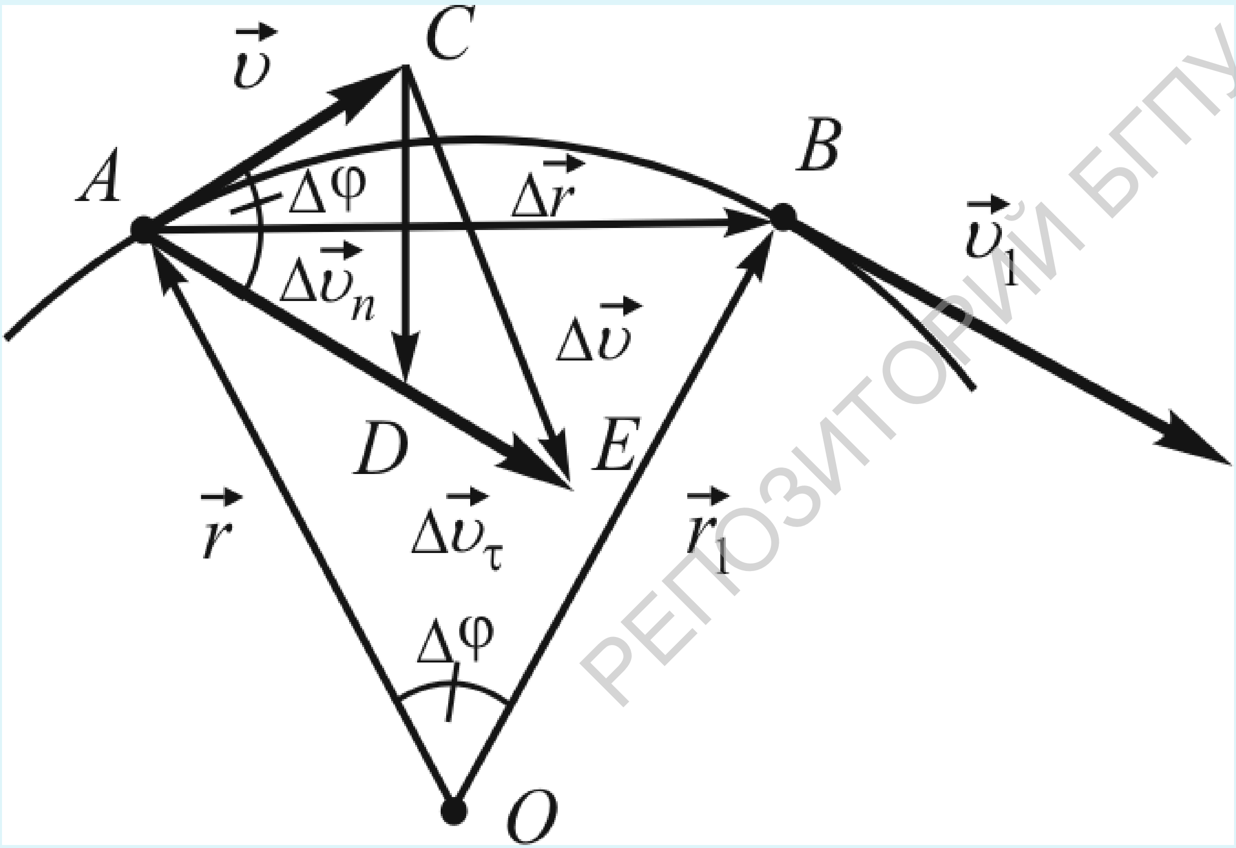
Это ускорение называется тангенциальным или касательным и направлено, как и скорость, по касательной к траектории.

Изменение направления вектора скорости за время Δt характеризуется углом поворота $\Delta\varphi$, которому соответствует отрезок CD перемещения конца вектора $\vec{\upsilon}$ при повороте ($\Delta\upsilon_n = CD$).



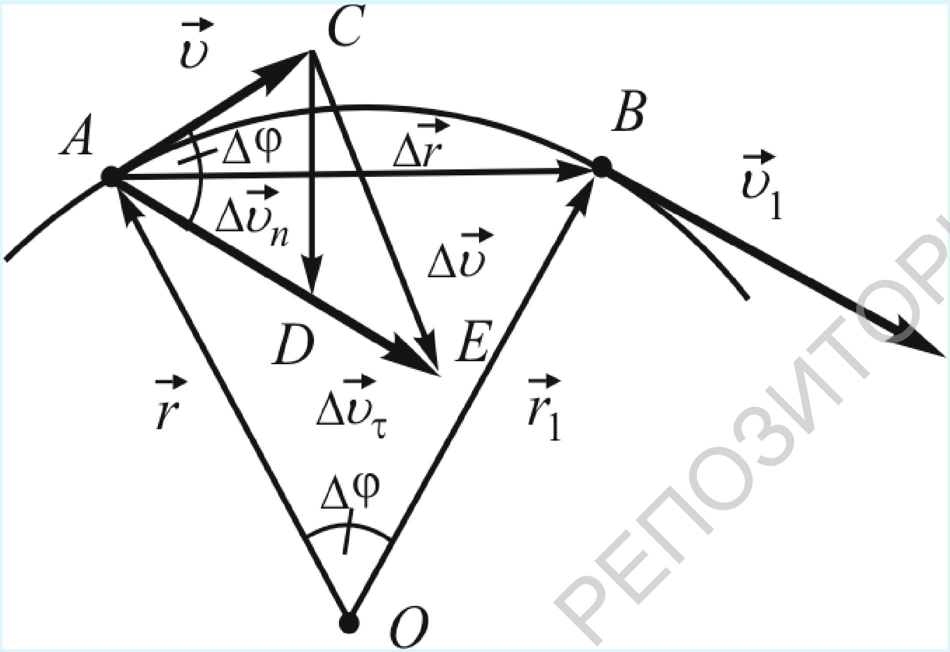
Заметим, что радиус-вектор $\vec{r}$ также поворачивается на угол $\Delta\varphi$, которому соответствует перемещение $\Delta\vec{r}$.

Для определения изменения направления скорости $a_n = \Delta \upsilon_n / \Delta t$ будем бесконечно уменьшать интервалы времени Δt .



При этом точки A и B траектории и векторы υ_1 и υ станут сближаться и будут лежать практически в одной плоскости, называемой соприкасающейся плоскостью с кривой.

Для упрощения вывода ограничимся случаем плоского движения, при котором все точки траектории лежат в одной плоскости на дуге круга с радиусом кривизны *r*.



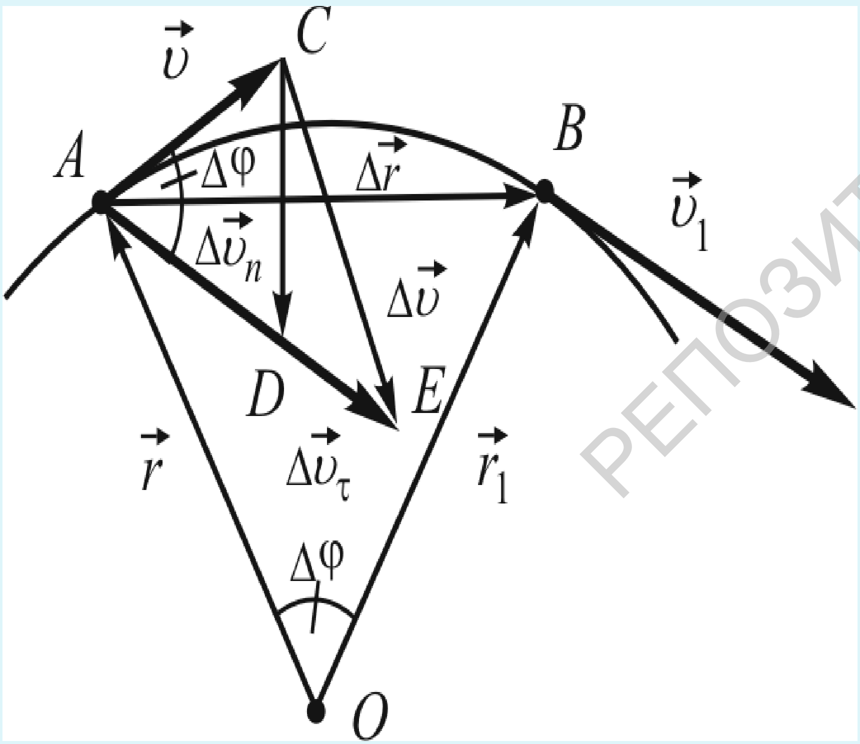
В пределе при $\Delta\varphi \to 0$ углы при основании равнобедренного треугольника ACD будут стремиться к 90° и следовательно, вектор $\vec{a}_n$ будет направлен по нормали к вектору скорости $\vec{\upsilon}$, т. е. по радиусу к центру кривизны O.

Поэтому ускорение $a_n = d\upsilon_n / dt$ называется нормальным или центростремительным.

Треугольники ACD и OAB подобны, поэтому из

пропорциональности сторон имеем: $CD / AC = AB / OA$

или $\left|\Delta\vec{\upsilon}_n\right| / \upsilon = \left|\Delta\vec{r}\right| / r.$



Отсюда $\left|\vec{\upsilon}_n\right| = \upsilon \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| / r.$

Разделим обе части последнего равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, в результате получим величину нормального ускорения

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\upsilon}_n\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\upsilon}{r} \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{r}$$

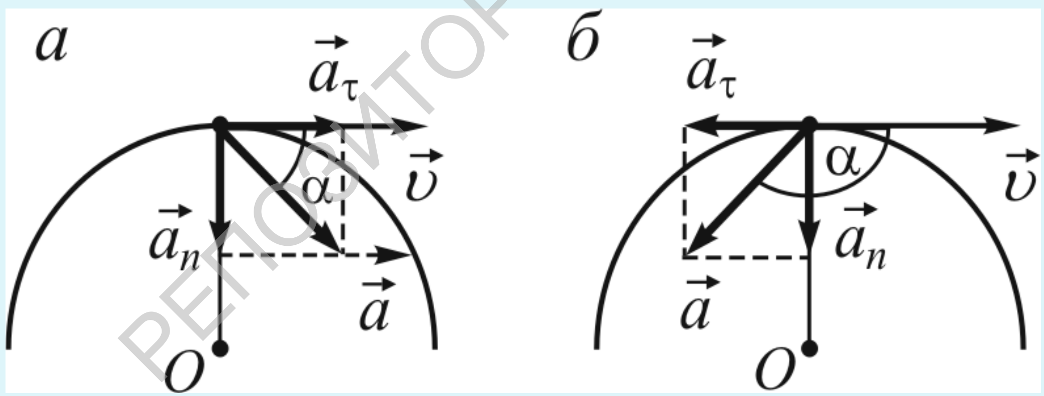
При прямолинейном движении вектор скорости υ направлен вдоль траектории и может изменяться только по величине (в этом случае нормальное ускорение $a_n = 0$).

При движении по окружности радиусом R с постоянной по величине скоростью тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$,а нормальное $a_n = \upsilon^2 / R = const$ и направлено по радиусу к центру кривизны. Оно прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально радиусу траектории.

В общем случае вектор полного ускорения $\vec{a}$ слагается из векторов тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального ускорений $\vec{a}_n$ и направлен под углом к касательной в данной точке траектории:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad .$$

Этот угол острый ($\alpha < \pi/2$), если модуль скорости растет (рис. а), тупой ($\alpha > \pi/2$), если модуль уменьшается (рис. б), и $\alpha = \pi/2$ при неизменном модуле скорости.



Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{r}\right)^2}$$

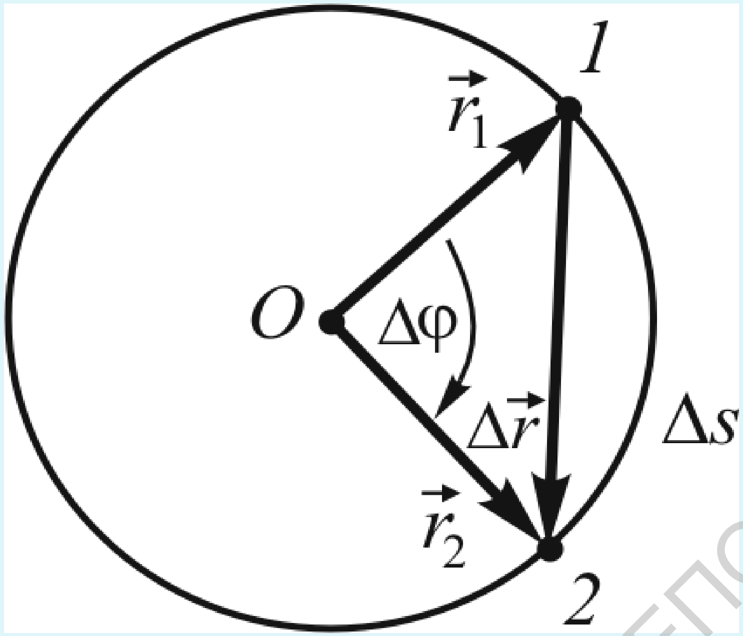
Движение точки по окружности

Наиболее простым и часто встречающемся в технике и повседневной жизни является случай криволинейного движения, называемого вращательным движением.

Движение точки по окружности удобно описывать не линейными величинами $\Delta\vec{r}$, s, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$,

а угловыми: углом поворота φ, угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Пусть точка, двигаясь по окружности, за время Δt переместилась из положения 1 в 2.



При этом радиус-вектор, определяющий ее положение, не изменился по величине ($r = \text{const}$), а только повернулся на угол $\Delta\varphi$.

Мы полностью решим задачу о движении точки по окружности, если найдем зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$.

Рассмотрим сначала равномерное вращение, при котором за любые равные интервалы времени углы поворота одинаковые.

Какие бы при этом мы не брали интервалы Δt, отношение угла поворота ко времени $\Delta\varphi/\Delta t$ будет постоянным и его можно использовать для характеристики скорости движения.

Угловая скорость равномерного вращения равна отношению угла поворота $\Delta\varphi$ к интервалу времени Δt, за который этот поворот совершается

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Единица измерения угловой скорости — 1 рад/с.

Если за время Δt точка совершает N полных оборотов, то угол $\Delta\varphi = 2\pi N$, а угловая скорость

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu ,$$

где $T = \Delta t / N = 1/\nu$ - период обращения,

$\nu = N/\Delta t$ - частота вращения.

Зная угловую скорость и время, можно определить угол поворота за любой интервал $\Delta t = t - t_0$ времени: откуда $\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0)$,

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t}$$

где φ_0 - начальный угол поворота в момент времени $t_0 = 0$.

В случае неравномерного вращения различают среднюю и мгновенную угловые скорости.

Средняя угловая скорость равна отношению угла поворота к интервалу времени, за который этот поворот произошел

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Мгновенная угловая скорость характеризует вращение в данный момент времени и равна пределу отношения или производной угла поворота по времени

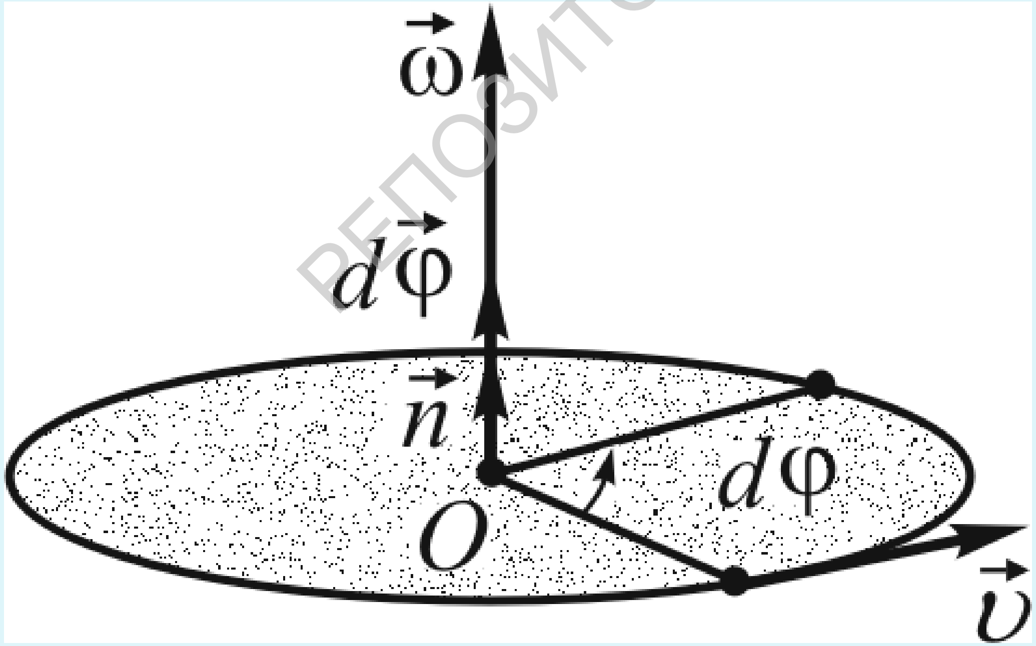
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость, как и линейная, характеризуется не только величиной (численным значением), но и направлением.

Введем вектор бесконечно малого угла $d\varphi$, который численно равен углу поворота радиуса-вектора $d\vec{\varphi}$ и направлен вдоль единичного вектора нормали $\vec{n}$ к плоскости таким образом, что если смотреть с вершины вектора $\vec{n}$, то поворот будет происходить против часовой стрелки:

$$d\vec{\varphi} = \vec{n} \cdot d\varphi$$

, где модуль $|\vec{n}| = 1$.



Тогда вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n},$$

а его направление совпадает с нормалью к плоскости вращения.

Характеристикой изменения угловой скорости является угловое ускорение.

Различают среднее и мгновенное угловые ускорения.

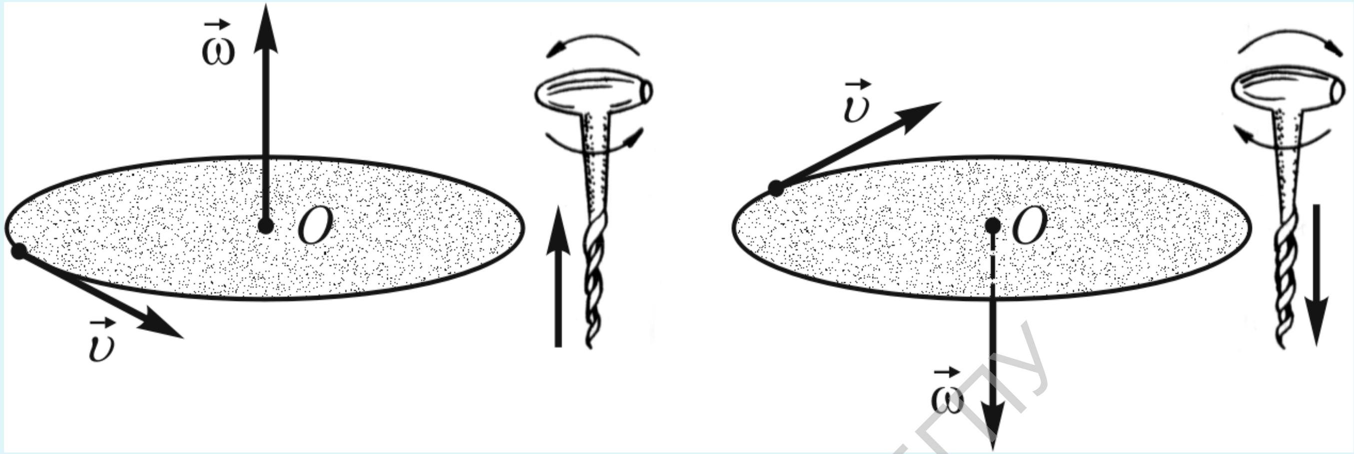
Среднее угловое ускорение за некоторый интервал времени равно отношению изменения угловой скорости ко времени, за которое произошло это изменение:

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Мгновенное угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в данный момент времени и равно пределу этого отношения, или производной угловой скорости по времени, или второй производной угла по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Единица измерения углового ускорения — 1 рад/с^2.



Для определения направления векторов угловых величин удобно пользоваться правилом правого винта (буравчика): если поворачивать головку винта в направлении вращательного движения точки, то его поступательное движение покажет направление вектора угловой скорости.

В отличие от свободных векторов, которые могут иметь произвольные точки приложения и направления в пространстве (например $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$, …), векторы угловых величин $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$, … являются аксиальными, т. е. они всегда направлены вдоль оси вращения (перпендикулярно плоскости вращения).

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с вектором изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$: в случае ускоренного движения по окружности совпадает с направлением $\vec{\varepsilon}$ и противоположно ему в случае замедленного движения.

Отметим, что вектор угловой скорости всегда совпадает по направлению с вектором угла поворота.

В любом деле можно многого добиться лишь влюбившись в него.

А. Мигдал

Равноускоренное вращательное движение

Чтобы найти зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$ для равноускоренного вращательного движения, найдем сначала зависимость $\omega(t)$ от времени.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальный угол равен φ_0, а начальная угловая скорость ω_0 .

Из формулы определения углового ускорения бесконечно малое приращение угловой скорости $d\omega = \varepsilon dt$.

Интегрируя по времени $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon\, dt$, получаем линейную

зависимость $\omega(t)$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t}$$.

Из формулы определения угловой скорости выразим приращение угла поворота $d\varphi = \omega dt$.

Подставим в это соотношение полученное в соответствии с формулой значение ω и еще раз проинтегрируем по времени

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0\, dt + \int_0^t \varepsilon t\, dt.$$

В случае, когда $\varepsilon = const$, получим следующую квадратичную зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Исключив из последних двух уравнений время, получим еще одно соотношение, которое связывает между собой кинематические характеристики вращательного движения

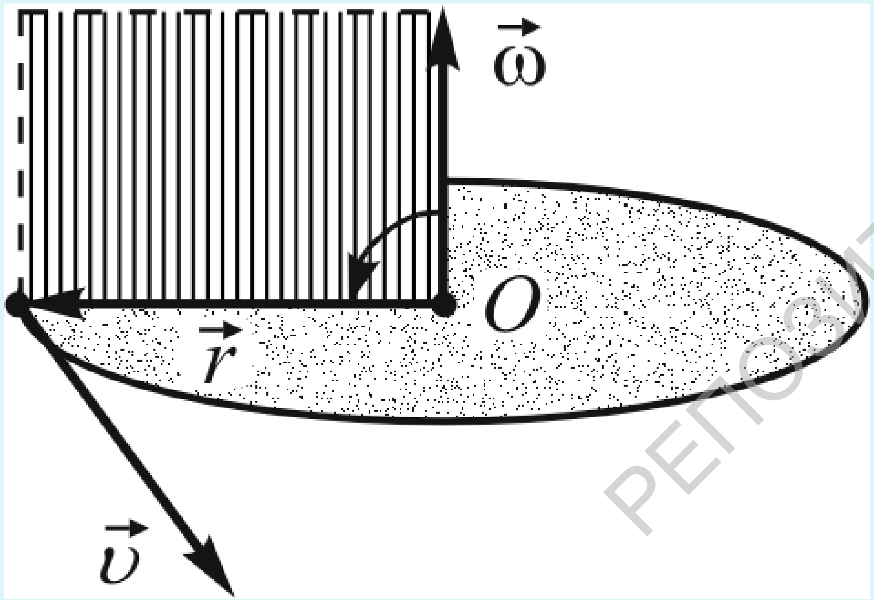
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Связь между векторами линейных и угловых величин

Установим связь между векторами угловой $\vec{\omega}$ и линейной $\vec{\upsilon}$ скоростей.

Учитывая, что радианной мерой угла является отношение соответствующей дуги ds к радиусу $d\varphi = ds / r$, а линейная скорость точки при движении по окружности численно равна $\upsilon = ds / dt$, получаем связь между величинами линейной и угловой скоростей: $\upsilon = \omega \cdot r$.

Из этой зависимости следует, что модуль скорости $\vec{\upsilon}$ численно равен площади прямоугольника, сторонами которого являются векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$.



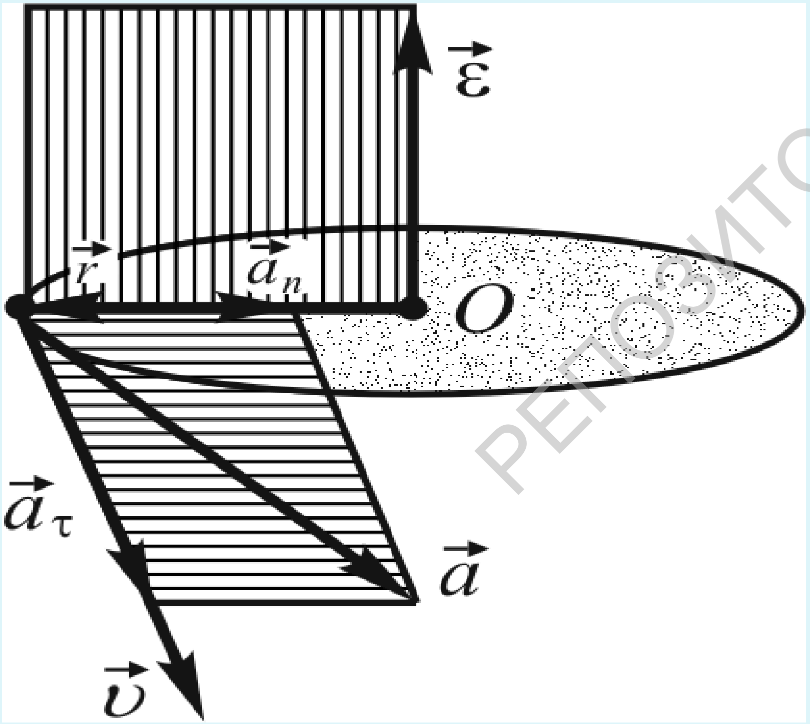
Кратчайший поворот $\vec{\omega}$ от к $\vec{r}$ будет происходить против часовой стрелки, если смотреть с вершины вектора $\vec{\upsilon}$.

Таким образом, вектор линейной скорости $\vec{\upsilon}$ равен векторному произведению угловой скорости и радиуса-вектора точки, в которой определяется $\vec{\upsilon}$

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right].$$

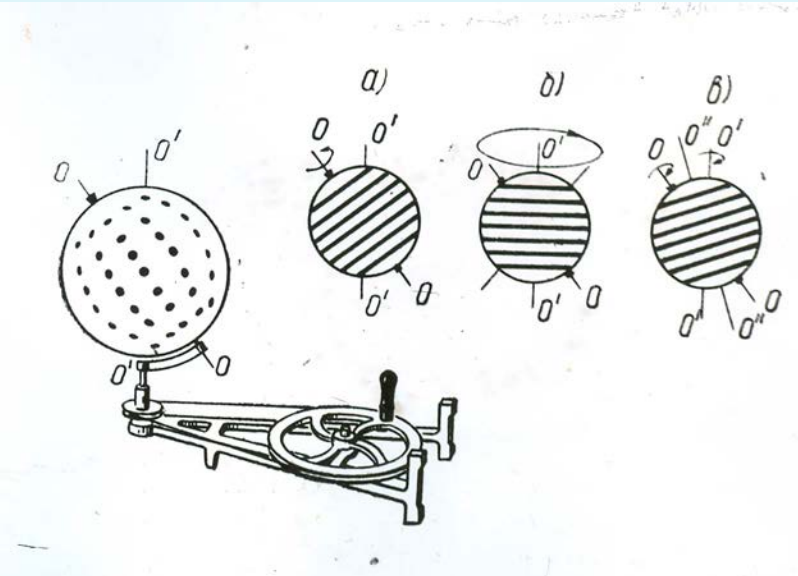
Подставляя в формулу определения модуля углового ускорения $\varepsilon = d\omega / dt$ выражение $\omega = \upsilon / r$ и учитывая, что тангенциальное ускорение $a_\tau = d\upsilon / dt$, получаем связь углового и тангенциального ускорений:

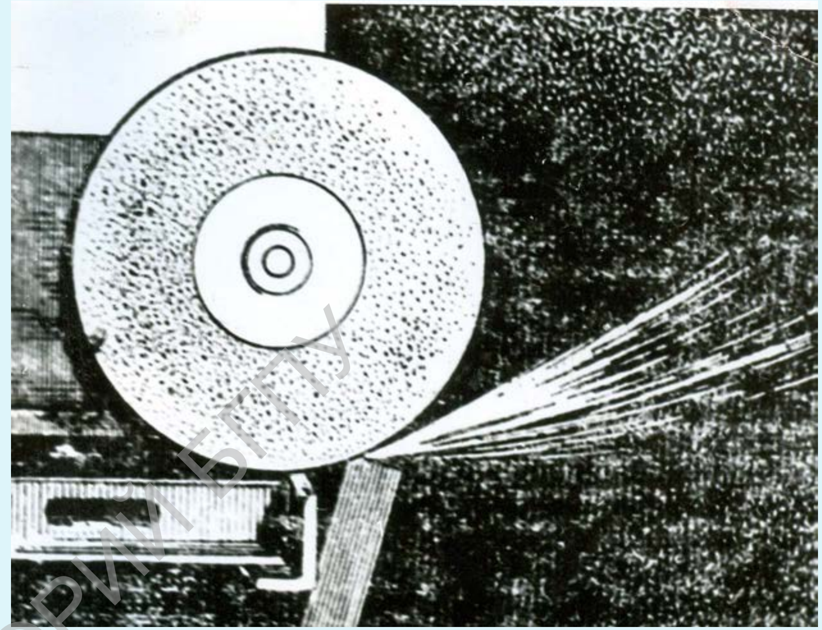
$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}.$$

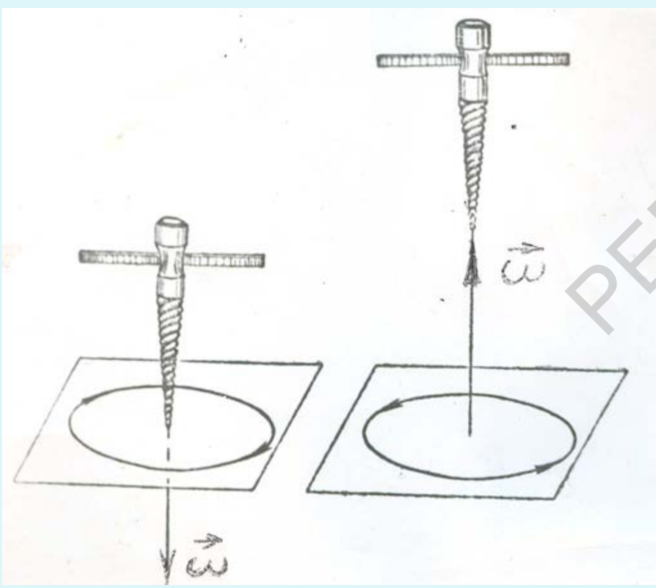


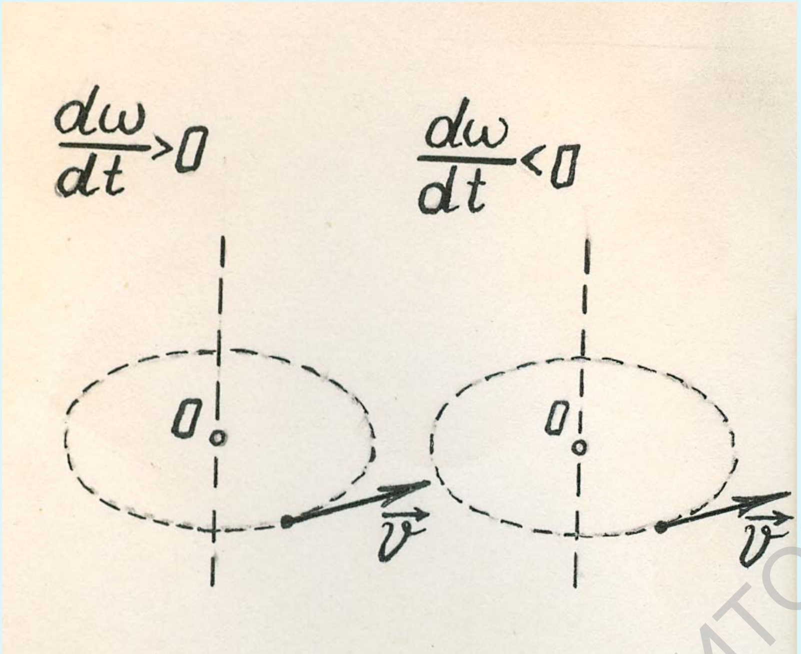
Из этой формулы и рисунка видно, что вектор $\vec{a}_\tau$ равен векторному произведению углового ускорения и радиуса-вектора:

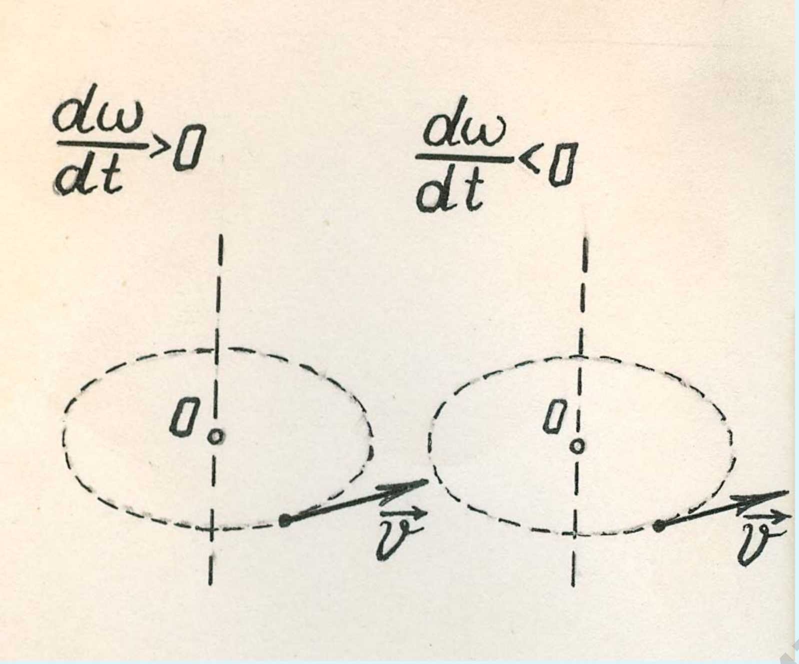
$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}].$$

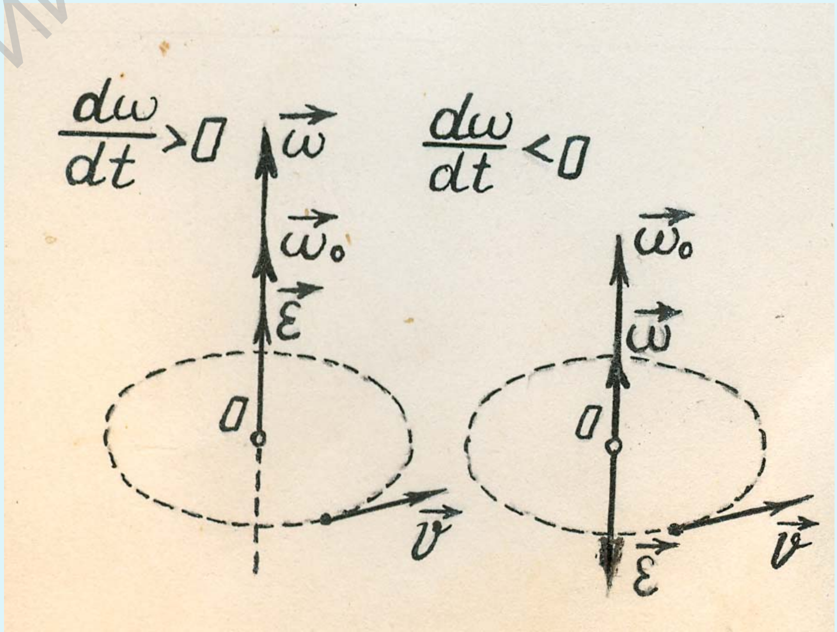

а)
б)
в)
O
O'
O''




$\vec{\omega}$


$\frac{d\omega}{dt}>0$
$\frac{d\omega}{dt}<0$
O
O
$\vec{v}$
$\vec{v}$


$\frac{d\omega}{dt} > 0$
$\frac{d\omega}{dt} < 0$
0
0
$\vec{v}$
$\vec{v}$


$\frac{d\omega}{dt} > 0$
$\vec{\omega}$
$\vec{\omega}_0$
$\vec{\varepsilon}$
0
$\vec{v}$
$\frac{d\omega}{dt} < 0$
$\vec{\omega}_0$
$\vec{\omega}$
0
$\vec{\varepsilon}$
$\vec{v}$

Нормальное ускорение численно равно

$$a_n = \upsilon^2 / r = \omega^2 r$$

и направлено к центру кривизны противоположно $\vec{r}$, поэтому

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} .$$

Вектор полного ускорения точки

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] - \omega^2 \vec{r} .$$