Лекция 2. Кинематика материальной точки

СОДЕРЖАНИЕ

Понятие о материальной точке

Механика включает три основных раздела: кинематику, динамику и статику.

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение тел без учета взаимодействий между ними, т.е. без выяснения причин, вызывающих или изменяющих состояние движения.

Динамика изучает законы движения тел, обусловленные причинами, вызывающими тот или иной характер движения.

Статика рассматривает условия равновесия тел.

Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики оказываются естественным следствием законов динамики.

Механическое движение может быть весьма различных видов и носить достаточно сложный характер.

Поэтому при изучении движений в механике реальные движения вначале рассматривают как совокупность отдельных более простых видов движений, а изучив их, переходят затем снова к более сложным движениям.

Наиболее простым примером механического движения является движение так называемой материальной точки.

Всякое движущееся тело обладает определенными размерами - протяженностью в пространстве.

Само движение также происходит в какой-то части пространства, размер, который мы назовем масштабом движения.

Так, например, планета Земля представляет собой шар ($d \approx 1{,}3 \cdot 10^4$ км), движущийся по круговой орбите ($D \approx 3 \cdot 10^8$ км) вокруг Солнца.

При таком огромном масштабе движения, когда $d \ll D$, размеры земного шара и происходящие в нем процессы практически не сказываются на характере его движения по орбите.

В результате Землю можно в этом движении рассматривать как материальную точку.

Под материальной точкой понимают в механике такое тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данной задаче.

Другими словами, материальная точка представляет абстракцию реального тела, которое в данной задаче может рассматриваться как геометрическая точка, обладающая массой, равной массе тела.

Введение понятия материальной точки оказывается полезным и при рассмотрении протяженных тел.

Так, для характеристики движения тела в целом необходимо знать закономерности движения отдельных его частей, на которые можно мысленно разделить тело в виде материальных точек.

Любое тело можно рассматривать в качестве системы материальных точек.

Незаписанная мысль – утерянный клад

Д.Менделеев

Система отсчёта

Положение исследуемого тела может быть определено только по отношению к какому-нибудь другому телу.

Тело, которое служит для определения положения других тел, называется телом отсчета. Чтобы описать движение, с этим телом связывают некоторую систему координат для отсчета положения в пространстве, а также часы для отсчета времени.

Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов образуют систему отсчета.

Понятие системы отсче*та* является одним из основополагающих в физике.

Поскольку изменение положения любого тела можно наблюдать только по отношению к другим телам, то любое движение (как и покой) относительны.

Движение одного и того же тела в разных системах отсчета может иметь разный характер.

По причине относительности все системы отсчета при кинематическом рассмотрении движения равноправны.

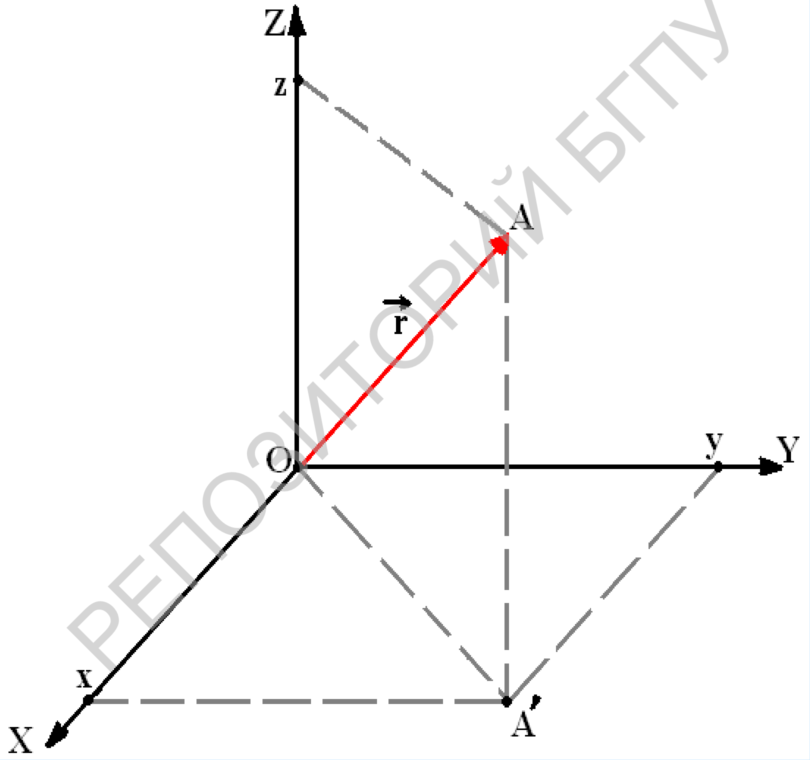
Другое дело, что в некоторых из них законы механики (об этом мы узнаем позже) принимают наиболее простой вид и для решения конкретных задач такие системы являются более предпочтительными.

Для описания движения материальной точки нужно знать ее положение в разные моменты времени.

Возможны три способа описания: координатный (скалярный), векторный и так называемый естественный (по траектории).

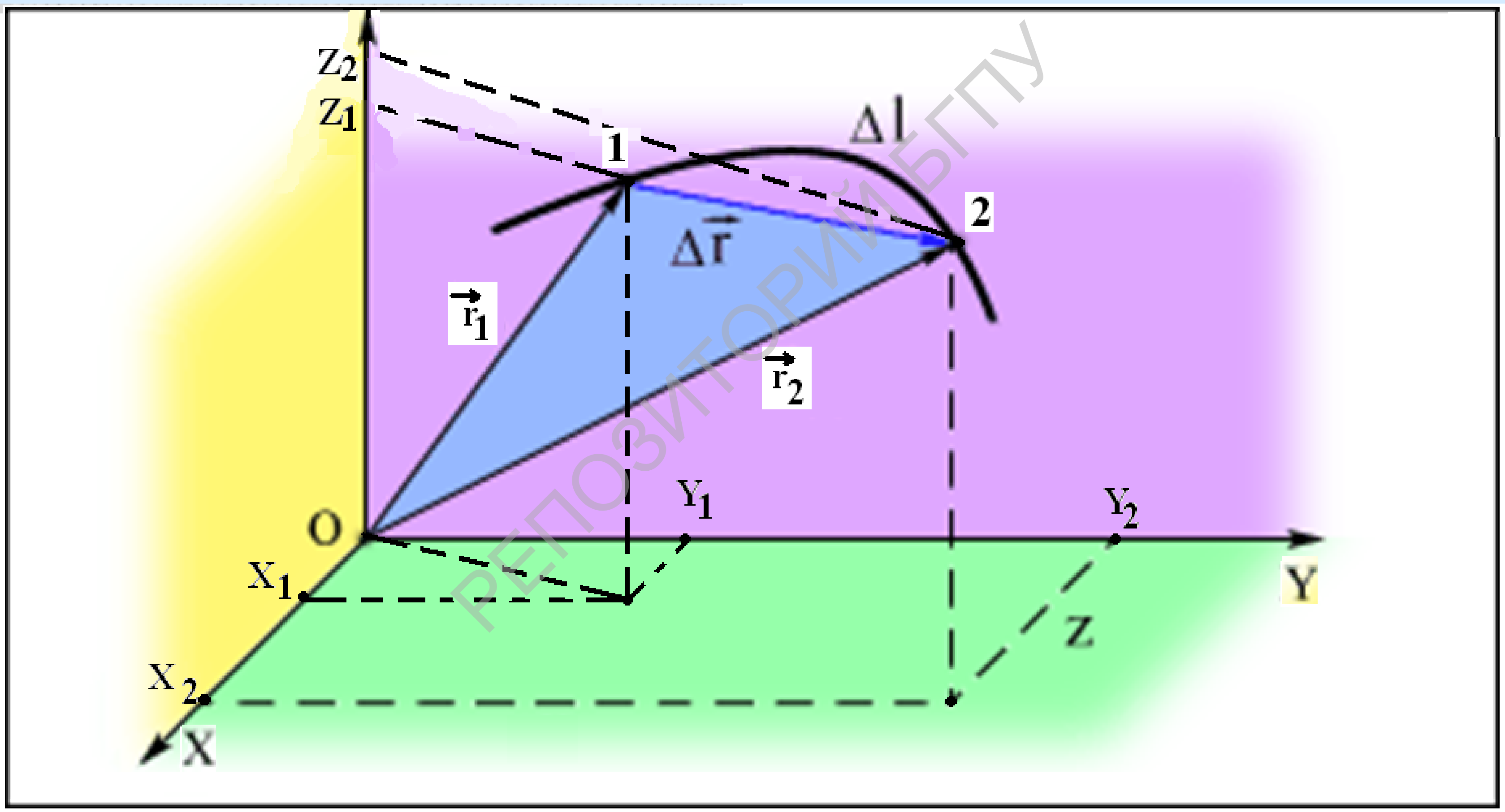
Рассмотрим эти способы и связь между ними.

При координатном способе положение точки А в любой момент времени t задается ее координатами x, y, z.



При векторном способе положение точки определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным с начала отсчета О в данную точку А.

Пусть при движении точка переместилась из положения 1 в положение 2. Эти положения определяются соответствующими радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, (или координатами x_1, y_1, z_1, и x_2, y_2 , z_2).

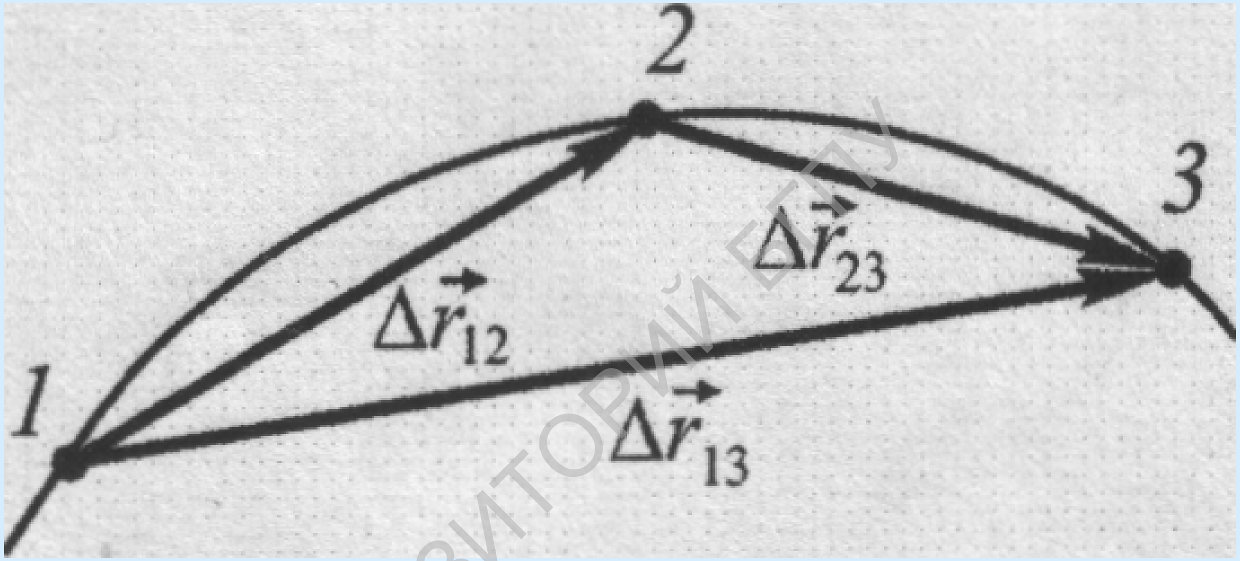


Вектор, проведенный из начального положения материальной точки в положение, где точка находится в рассматриваемый момент времени, называется вектором перемещения $\Delta\vec{r}$.

Иначе говоря, вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ соединяет две точки, соответствующие двум определенным положениям материальной точки при движении.

Как видим из рисунка, он равен приращению радиуса-вектора $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ за время Δt.

Если материальная точка последовательно перемещается из положения 1 в 2, а затем в положение 3, то суммарный вектор перемещения $\Delta\vec{r}_{13}$ будет равен сумме векторов $\Delta\vec{r}_{12}$ и $\Delta\vec{r}_{23}$.



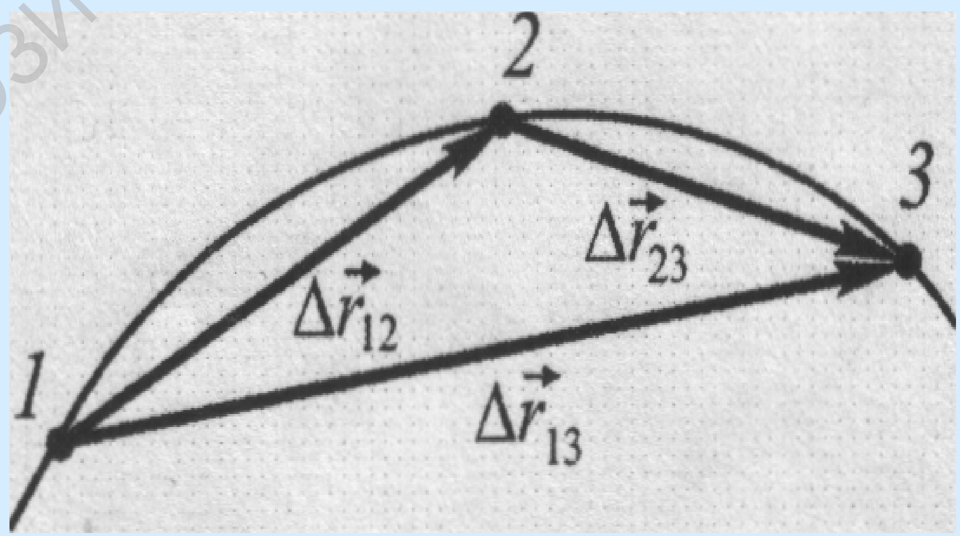
Попасть из точки 1 в точку *3* можно разными путями, но суммарное перемещение во всех случаях будет одно и то же

$$\Delta\vec{r}_{13} = \Delta\vec{r}_{12} + \Delta\vec{r}_{23}.$$

Вектор перемещения показывает в каком направлении и на какое расстояние переместилась точка относительно первоначального положения, однако ничего не говорит о том, как она двигалась в каждый момент времени.

Например, если точка, движущаяся по окружности, вернулась в исходное положение, то перемещение численно равно нулю, хотя пройдено определенное расстояние.

Таким образом, важно знать не только перемещение, но и линию, по которой происходит движение.



Линия, вдоль которой материальная точка движется в пространстве в данной системе отсчета, называется траекторией движения.

Эту линию описывает конец радиуса-вектора точки.

Путь представляет собой длину участка траектории *s* , пройденного точкой за некоторый промежуток времени.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения материальной точки.

При прямолинейном движении в одном направлении путь s равен модулю вектора перемещения $|\Delta\vec{r}\,|$, а при криволинейном - $s > |\Delta\vec{r}\,|$.

Например, если точка, движущаяся по окружности радиусом R, сделала половину оборота, то модуль перемещения $|\Delta\vec{r}| = 2R$, а пройденный путь $s = \pi R$.

В тех случаях, когда траектория известна, движение можно описать третьим способом (естественным), в соответствии с которым положение точки определяется величиной пути s(t), пройденного по траектории за некоторый промежуток времени.

Если хочешь победить весь мир - победи себя

Ф.Достоевский

Таким образом, для описания движения необходимо задать зависимости : $\vec{r}(t)$,

или x(t), y(t), z(t), или s(t), которые называются кинематическими законами движения.

Векторный и координатный методы описания движения материальной точки по сути тождественны.

Например, в декартовой системе координат радиус-вектор точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,т.е. связывает воедино три скалярных закона движения.

Векторный способ предпочтителен при теоретическом исследовании характера движения.

Координатный способ более удобен для решения конкретных задач.

Уравнение траектории связывает координаты движущейся точки, например, при движении на плоскости y = f(x) или x = f(y).

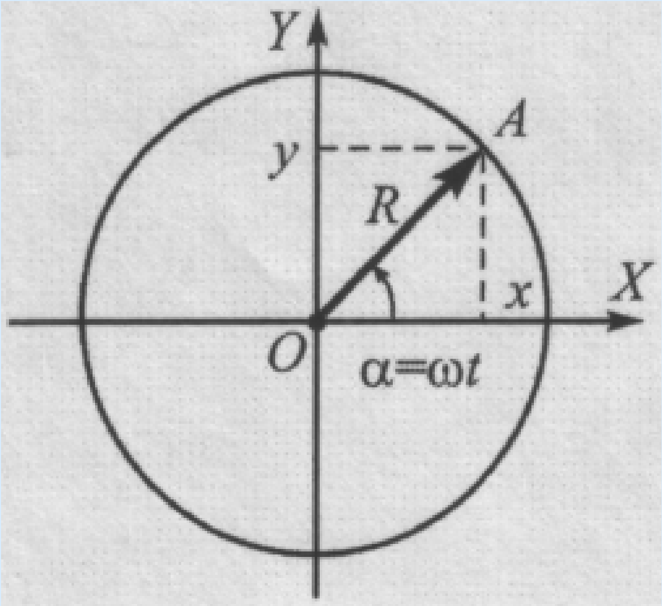
Чтобы получить уравнение траектории, необходимо из уравнений x(t), y(t), z(t), исключить время.

Пусть, например, движение задано уравнениями

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t.$$

Исключив из них время, получим уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Векторы скорости и ускорения

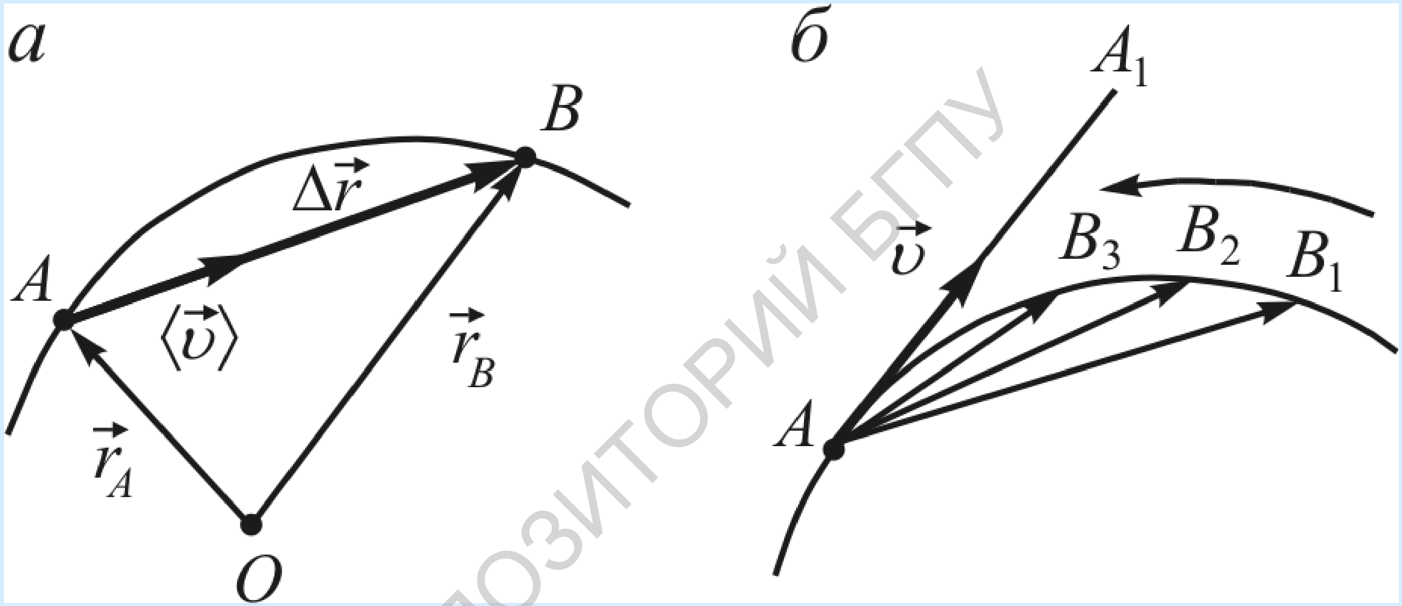
Обычно при рассмотрении различных задач необходимо знать не только перемещение или пройденное расстояние, но и скорость движения (перемещения).

Различают среднюю скорость движения точки за некоторый конечный промежуток времени Δt, и мгновенную скорость в данный момент времени (в данной точке траектории).

Средней скоростью движения за время Δt называют отношение вектора перемещения точки $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени, за который произошло это перемещение

$$<\vec{\vartheta}>=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор средней скорости $<\vec{\vartheta}>$ направлен вдоль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, т.е. вдоль хорды *AB* .



Для того чтобы найти скорость движения в данной точке траектории, вводится понятие мгновенной скорости.

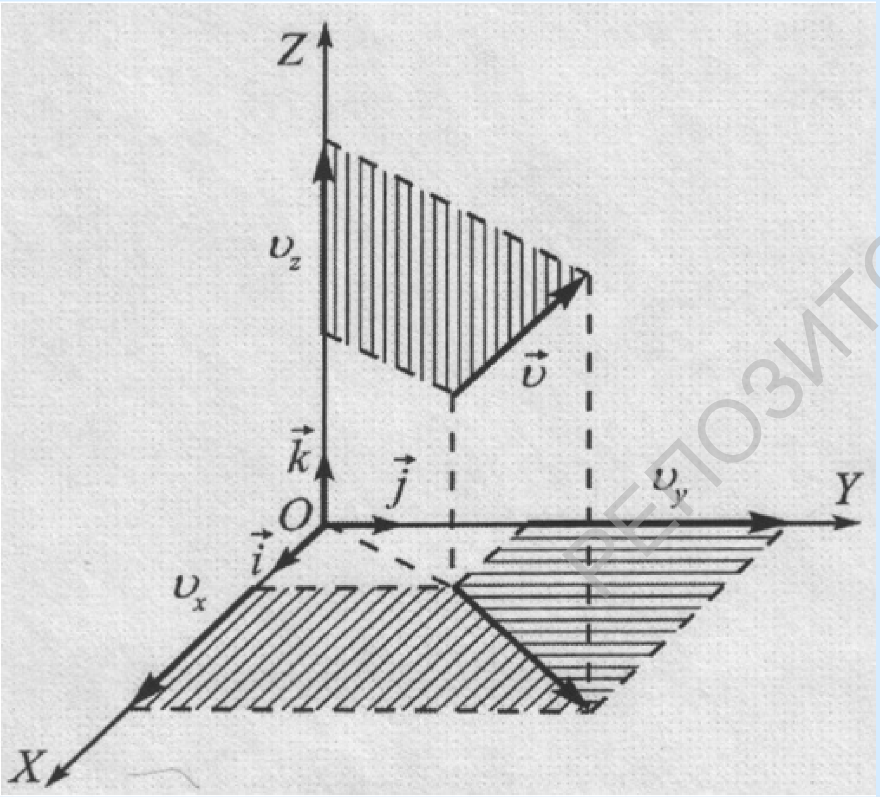
Вектор мгновенной скорости равен пределу отношения вектора перемещения к интервалу времени Δt, т.е. производной радиуса-вектора $\Delta\vec{r}$ по времени, и направлен по касательной к траектории в данной точке в направлении движения точки А (как и вектор $\vec{r}$).

Разложим вектор мгновенной скорости для некоторого момента времени на составляющие вдоль координатных осей

$$\vec{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_x \vec{i} + \vartheta_y \vec{j} + \vartheta_z \vec{k},$$

где
$$\vec{\vartheta}_x = \frac{dx}{dt}\vec{i}, \quad \vec{\vartheta}_y = \frac{dy}{dt}\vec{j}, \quad \vec{\vartheta}_z = \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$



Тогда модуль вектора скорости

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}.$$

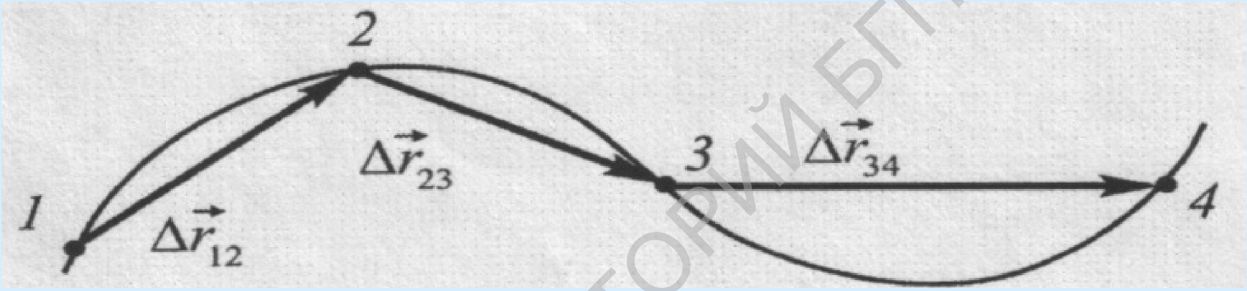
Равномерным называется движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени Δt проходит одинаковые пути Δs.

В этом определении существенно не только равенство путей Δs за равные интервалы времени Δt, но и произвольность выбора данных интервалов.

Значит, какой бы интервал мы не взяли, отношение $\Delta s/\Delta t$ неизменно т.е. средняя скорость при равномерном движении равна мгновенной в любой момент времени $<\vartheta>=\vartheta$.

В реальной жизни равномерное прямолинейное движение встречается не слишком часто.

Чаще за одинаковые промежутки времени тело совершает не одинаковые как по величине, так и по направлению перемещения.



Такое движение будет неравномерным.

Для него отношения перемещения к интервалу времени непостоянные:

$$\frac{\Delta\vec{r}_{12}}{\Delta t} \neq \frac{\Delta\vec{r}_{23}}{\Delta t} \neq \frac{\Delta\vec{r}_{34}}{\Delta t}.$$

Для количественной характеристики изменения скорости вводится векторная физическая величина, называемая ускорением.

Различают среднее и мгновенное ускорения.

Среднее ускорение равно отношению изменения вектора скорости $\Delta\vec{\vartheta}$ к интервалу времени Δt, за который произошло это изменение, и направлено вдоль вектора изменения скорости $\Delta\vec{\vartheta}$

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}.$$

Среднее ускорение характеризует изменение скорости за некоторый интервал времени.

Для того чтобы определить изменение скорости в данный момент времени, вводится понятие мгновенного ускорения.

Вектор мгновенного ускорения равен пределу отношения изменения вектора скорости $\Delta\vec{\vartheta}$ к интервалу времени, который бесконечно уменьшается, т.е. производной вектора скорости по времени или второй производной радиуса-вектора по времени

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Перемещение и путь при равномерном и равноускоренном прямолинейном движении

Из определения скорости

$$\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

следует, что элементарно малое перемещение материальной точки за элементарно малый промежуток времени dt определяется равенством

$$d\vec{r} = \vec{\vartheta}(t)\,dt.$$

Чтобы определить перемещение точки за конечный интервал времени Δt, необходимо этот интервал разбить на очень малые промежутки dt, определить малые перемещения $d\vec{r}$ и суммировать их.

В результате получим:

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{\vartheta}(t)dt \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{\vartheta}(t)dt.$$

Рассмотрим случай прямолинейного равномерного движения $\vec{\vartheta} = const.$

Вынося $\vec{\vartheta}$ за знак интеграла, получим:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}(t - t_0).$$

Если наблюдение начато в момент времени t = 0, то $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}t.$

Это условие (t = 0) будем учитывать во всех последующих случаях рассмотрения движений.

Найдем зависимость скорости $\vec{\vartheta}$ от времени при переменном движении.

Из определения ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\vartheta}}{dt}$

имеем: $d\vec{\vartheta} = \vec{a}dt.$

В результате интегрирования получим зависимость

$$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt.$$

Если движение прямолинейное равнопеременное, ($\vec{a} = const$), приходим к результату:

$$\vec{\vartheta}(t) = \vec{\vartheta}_0 + \vec{a}t.$$

Найдем $\vec{r} = \vec{r}(t)$ для случая, когда $\vec{a} = const$ в явном виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\vartheta}(t)dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{\vartheta}_0 + \vec{a}t)dt,$$

откуда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\vartheta}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Спроецировав полученные выше равенства, например, на ось ох, получим:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\vartheta}_x \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{\vartheta}_x = \boldsymbol{\vartheta}_{0x} + \boldsymbol{a}_x \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\vartheta}_{0x} \boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{a}_x \boldsymbol{t}^2}{2}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как зная величину скорости в каждый момент времени, вычислить путь, проходимый материальной точкой с момента времени t_1 до момента времени t_2.

Разобьем промежуток времени $t_2 - t_1$ на N малых, не обязательно одинаковых промежутков: Δt_1, Δt_2...... Δt_N.

Тогда весь путь s , пройденный материальной точкой, можно представить:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i .$$

В пределе

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i \Delta t_i .$$

Откуда путь, проходимый точкой за интервал времени Δt, равен:

$$s = \int_0^t \vartheta(t) dt.$$

Если движение равномерное $\vartheta(t) = const,$

при $t_0 = 0$ получим $s = \vartheta \cdot t.$

Если движение равнопеременное $a = const,$

при $t_0 = 0$ имеем: $s = \int_0^t (\vartheta_0 + at)dt,$

откуда $s = \vartheta_0 t + \frac{at^2}{2}.$

В процессе изучения кинематики материальной точки мы выяснили как:

- выбирать систему отсчета (тело отсчета, система координат, часы);

- определять положение материальной точки (радиус-вектор, координаты, пройденный путь);

- определять изменение положения материальной точки (зависимости радиуса-вектора, координат, пути от времени);

- определять быстроту изменения положения (средняя и мгновенная скорости);

- определять быстроту изменения скорости (ускорение).

Рассмотренные кинематические характеристики позволяют решить основную задачу кинематики: определить зависимость положения тела от времени в выбранной системе отсчета, если известно его ускорение:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (векторный способ),

или зависимости

x = x(t), y = y(t), z = z(t) (координатный способ);

s = s(t) (естественный способ).