Белорусский государственный университет

УДК 517.5

Гриб
Николай Васильевич

АППРОКСИМАЦИЯ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Минск, 2014

Работа выполнена в УО “Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка”.

Научный руководитель — **Русак Валентин Николаевич,**
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
высшей математики и математической физики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Ровба Евгений Алексеевич,**
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой теории
функций, функционального анализа
и прикладной математики УО “Гродненский
государственный университет
имени Янки Купалы”;
Мардвилко Татьяна Сергеевна,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
УО “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”.

Оппонирующая организация — УО “Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины”.

Защита состоится 11 апреля 2014 г. в 10.00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “10” марта 2014 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.01.07
доктор физико-математических наук,
профессор Н. В. Лазакович

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи и первые основополагающие результаты в теории рациональной аппроксимации принадлежат П. Л. Чебышеву. В частности, была доказана теорема об альтернансе для рациональной функции наилучшего приближения, найдены точные выражения для наилучших приближений некоторых функций посредством рациональных дробей определенного порядка. Исследования Чебышева в дальнейшем были продолжены Е. И. Золотаревым, А. А. Марковым, однако после них в течении почти столетия рациональная аппроксимация развивалась слабо.

Интенсивное развитие теории рациональной аппроксимации началось с 1955 года. А. А. Гончаром и Е. П. Долженко были получены первые обратные теоремы рациональной аппроксимации со свободными полюсами, т. е. были найдены структурные свойства функций, которые гарантируются определенной скоростью стремления к нулю их наилучших рациональных приближений.

Через $E_n(f)$ и $R_n(f)$ обозначим наилучшие приближения функции $f \in C[a,b]$ посредством алгебраических полиномов и рациональных функций степени не выше n, соответственно $E_n^T(f)$ и $R_n^T(f)$ — наилучшие приближения $f \in C_{2\pi}$ тригонометрическими многочленами и рациональными функциями степени не выше n. Одной из основных задач теории рациональной аппроксимации является поиск функций и функциональных классов, для которых верны асимптотические оценки

$$R_n(f) = o\left(E_n(f)\right), \;\; R_n^T(f) = o\left(E_n^T(f)\right), \;\; n \to \infty. \tag{1}$$

Существование таких функций было доказано А. А. Гончаром в 1955 году, а в 1964 году Д. Ньюмен показал, что рациональная аппроксимация функции $|x|$ гораздо эффективнее полиномиальной. Лежащий в основе его работы метод послужил сильным толчком к развитию прямых теорем рациональной аппроксимации со свободными полюсами. Были найдены широкие классы функций, для которых выполняются соотношения (1), открыты новые теоремы по рациональной аппроксимации, во многих случаях были найдены точные порядки наилучших рациональны приближений на функциональных классах. При этом наиболее полные результаты были получены для функций, непрерывных на отрезке. Отметим, в частности, исследования П. Турана, Г. Фройда, А. А. Гончара, А. П. Буланова, В. А. Попова, П. П. Петрушева, А. А. Пекарского.

В отличие от многочленов, рациональные функции не обладают свойством инвариантности относительно сдвига аргумента и операции интегрирования, что затрудняет доказательство прямых теорем рациональной аппроксимации со свободными полюсами. По этой причине методы приближений не были прямыми, процесс построения приближающей функции являлся итеративным и в нем использовались некоторые промежуточные функции. В 1984 году В. Н. Русак предложил новый метод доказательства прямых теорем рациональной аппроксимации, основанный на построенных им специальных рациональных операторах. Главное преимущество операторного метода заключалось в его конструктивности, т. е. для приближаемой функции сразу же явно указывалась аппроксимирующая ее рациональная функция. С помощью этого подхода были получены новые классы аналитических и 2π-периодических функций, рациональная аппроксимация которых существенно эффективней полиномиальной, и найдены точные порядковые оценки рациональных приближений на некоторых классах.

Построенные В. Н. Русаком операторы типа Фейера, Джексона, Валле Пуссена являются интегральными и своим происхождением восходят к рациональным рядам Фурье. В 1993–1997 годах Е. А. Ровбой в пространстве $C(\mathbb{R})$ на основании интерполяционных рациональных функций Лагранжа были построены сумматорные аналоги этих операторов и изучены их аппроксимативные свойства. В аппрокимации со свободными полюсами построенные Е. А. Ровбой операторы и их модификации использовались В. Н. Русаком и И. В. Рыбаченко для приближения гельдеровских функций ограниченной вариации, выпуклых функций, функций с дробной производной. В 2006 году В. Н. Русак и Т. С. Мардвилко построили сумматорные операторы типа Фейера и Валле Пуссена в пространстве $C_{2\pi}$, применив их к аппроксимации периодических гельдеровских функций ограниченной вариации.

Как и в рациональной аппроксимации в целом, в приближениях сумматорными операторами периодический случай оказался менее исследованным. С учетом ряда достоинств операторного метода приближений актуальными являются задачи о построении сумматорных рациональных операторов в $C_{2\pi}$ и нахождении порядковых оценок их уклонений при соответствующем выборе полюсов оператора, которые зависят от функционального класса или индивидуальной функции.

К теории интерполирования близко примыкают вопросы построения квадратурных формул. Интерполяционные квадратурные формулы, предназначенные для интегрирования периодических функций, хорошо приближаемых тригонометрическими полиномами, изучены достаточно полно. На их основе разработаны приближенные методы решения интегральных уравнений, ядра и коэффициенты которых аппроксимируются полиномами. Представляет интерес модификация известных методов с целью применения рациональных функций для решения задач таких типов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Работа проводилась на кафедре математического анализа Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка в рамках научно-исследовательских работ "Исследование аппроксимационных и функциональных методов и их приложений к решению интегро-дифференциальных уравнений"(2006–2010 годы, регистрационный номер 20064423) и "Функциональные методы в теории интегро-дифференциальных уравнений"(2011–2015 годы, регистрационный номер 20115033).

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы "Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук".

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы состоит в получении порядковых оценок уклонений сумматорных рациональных операторов на конкретных классах функций из пространства $C_{2\pi}$, построении на основании интерполяционных рациональных операторов квадратурных формул типа Гаусса и их приложении к приближенному решению интегральных уравнений.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Построить сумматорные рациональные операторы типа Джексона и получить порядковые оценки уклонений на классах кусочно-выпуклых функций и гельдеровских функций ограниченной вариации.

2. Построить сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена и при подходящем выборе полюсов получить порядковые оценки уклонений на классах функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями из L_p либо функциями ограниченной вариации.

3. Построить интерполяционные рациональные операторы типа Лагранжа и получить порядковые оценки уклонений для сверток ядра Вейля с функциями ограниченной вариации.

4. На основании интерполяционных операторов получить квадратурные формулы типа Гаусса, разработать алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода и найти оценку погрешности приближенного решения.

Объект исследования — совокупность классов функций, рациональная аппроксимация которых эффективнее полиномиальной. Предмет исследования — сумматорные рациональные операторы как аппарат приближения таких функций.

Положения, выносимые на защиту

1. Сумматорные рациональные операторы типа Джексона, построенные в пространстве $C_{2\pi}$, и точные порядковые оценки их уклонений на классах кусочно-выпуклых функций и гельдеровских функций ограниченной вариации.

2. Сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена и полученные при подходящем выборе полюсов точные порядковые оценки их уклонений на классах периодических функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями из L_p либо функциями ограниченной вариации.

3. Интерполяционные рациональные операторы типа Лагранжа, построенные в пространстве $C_{2\pi}$, и порядковые оценки их уклонений для сверток ядра Вейля с функциями ограниченной вариации.

4. Квадратурные формулы типа Гаусса, полученные на основании интерполяционных рациональных операторов, алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода и оценка погрешности приближенного решения.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, выносимые на защиту в диссертационной работе, получены ее автором лично на основе рекомендаций научного руководителя. Часть результатов главы 4 получена совместно с научным руководителем и принадлежит обоим авторам на паритетных условиях.

Апробация результатов диссертации

Реультаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(14–19 сентября 2009, Минск).

2. Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(12–17 сентября 2011, Минск).

3. Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(10–14 сентября 2012, Минск).

4. Международной конференции "XI Белорусская математическая конференция"(5–9 ноября 2012, Минск).

5. Семинаре по теории аппроксимации БГПУ им. М. Танка (руководитель профессор В. Н. Русак), май 2009, апрель 2010.

6. Семинаре по теории функций БГУ (руководитель профессор Э. И. Зверович), март, май, октябрь 2012, май, декабрь 2013.

7. Семинаре по теории аппроксимации ГрГУ (руководитель профессор Е. А. Ровба), октябрь 2013.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 15 научных работах; из них: 7 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 "Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь"(общим объемом 3 авторских листа), 3 — статьи в сборниках материалов научных конференций и 4 — тезисы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка. Первая глава посвящена обзору литературы по теме исследования. Основные результаты исследования приводятся во второй, третьей и четвертой главах. Полный объем диссертации составляет 109 страниц. Библиографический список содержит 110 наименований, включая собственные публикации автора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 содержит обзор литературы по прямым теоремам рациональной аппроксимации и по методам построения приближающих рациональных операторов, выделены недостаточно изученные вопросы в рамках данного направления.

Глава 2 посвящена рациональным операторам типа Джексона и приближению с их помощью функциональных классов пространства $C_{2\pi}$.

В **разделе 2.1** строятся сумматорные рациональные операторы типа Джексона и исследуются их свойства.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $|\alpha_k| < 1$ – заданная система комплексных чисел,

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$$

— произведение Бляшке по этой системе, $\Phi_n(u)$ — аргумент произведения Бляшке на единичной окружности, $\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu})$. Уравнение $\pi_n^2(z) - 1 = 0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = \overline{1, 2n}$, расположенных на окружности $|z| = 1$.

С учетом обозначений

$$\rho_n(z) = z \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha}_k z)\,(z-\alpha_k)},$$

$$\psi_n(z) = \frac{2}{3}\left(2\rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho_n'(z) - z^2\rho_n''(z)\right),$$

$$K_{n,1}(z,\xi)=\left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)}+\frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)}-2\right)\frac{z\xi}{(z-\xi)^2}$$

введем в пространстве $C(T)$ непрерывных на единичной окружности функций сумматорный рациональный оператор типа Джексона равенством

$$D^*_{4n-2}(z,f)=\frac{1}{\psi_n(z)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{K^2_{n,1}(z,z_j)}{\rho_n(z_j)}f(z_j).$$

Значение оператора D^*_{4n-2} — рациональная функция, являющаяся отношением алгебраических многочленов степени не выше $4n-2$.

При $z=e^{iu},\ z_j=e^{iu_j}$ оператор D^*_{4n-2} имеет представление

$$D^*_{4n-2}(e^{iu},f)=\frac{1}{\psi_n(e^{iu})}\sum_{j=1}^{2n}\frac{f(e^{iu_j})}{\Phi'_n(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}},$$

если обозначить $f(e^{iu})=\varphi(u),\ \psi_n(e^{iu})=\Psi_n(u)$, положим

$$D_{2n-2}(u,\varphi)=\frac{1}{\Psi_n(u)}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\varphi(u_j)}{\Phi'_n(u_j)}\frac{\sin^4\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{\sin^4\frac{u-u_j}{2}}.$$

D_{2n-2} — действующий в пространстве $C_{2\pi}$ положительный линейный оператор, значениями которого являются тригонометрическае рациональные функции степени не выше $2n-2$. Кроме того, доказывается, что операторы D^*_{4n-2} и D_{2n-2} точны на константах.

В **разделе 2.2** получена оценка уклонения операторов D_{2n-2} в пространстве $C_{2\pi}$ в терминах модулей непрерывности.

Теорема 2.1. [1] *Если $\varphi(u)\in C_{2\pi}$, то имеет место неравенство*

$$|\varphi(u)-D_{2n-2}(u,\varphi)|\le\left(1+\pi\sqrt{2}\right)\omega\left(\frac{1}{\Phi'_n(u)}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(u)$.

Следствие 2.1. *Если $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-|\alpha_k|)=\infty$, то последовательность рациональных функций $D_{2n-2}(u,\varphi)$ равномерно сходится к функции $\varphi(u)$ на отрезке $[0,2\pi]$.*

Следствие 2.2. *Если $\varphi(u)\in C_{2\pi}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(u')-\varphi(u'')|\le M\left|u'-u''\right|^{\alpha},\ 0<\alpha\le1,$$

то имеет место неравенство

$$|\varphi(u)-D_{2n-2}(u,\varphi)|\le\frac{M\left(1+\pi\sqrt{2}\right)}{\left(\Phi'_n(u)\right)^{\alpha}}.$$

В **разделах 2.3** и **2.4** исследуется сходимость операторов типа Джексона соответственно к кусочно-выпуклым функциям и гельдеровским функциям ограниченной вариации.

Теорема 2.2. [3, 9, 11] *Если* $f(u) \in C_{2\pi}$ *четная и выпуклая на отрезке* $[0, \pi]$*, то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$*,* $m \leq 4n-4$ *будет иметь место порядковая оценка*

$$\|f(u) - D_{2m-2}(u, f)\| \leq 920 \frac{C_f}{n},$$

где C_f *— разность между наибольшим и наименьшим значениями функции* f *на отрезке* $[0, \pi]$.

Назовем функцию $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ простой, если она абсолютно непрерывна, равна нулю на дополнении отрезка $[a, b]$, $b - a \leq 2\pi$, называемого опорным, к отрезку $[(a+b)/2 - \pi, \ (a+b)/2 + \pi]$, и $\|\varphi'\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup} |\varphi'| \leq (b-a)^{-1}$. Доказательство теоремы 2.2 основано на следующей лемме.

Лемма 2.5 *Если* $f(u) = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k(u) + b_k \psi_k(u))$*, где* $a_k, b_k \geq 0$*,* $\varphi_k(u)$ *и* $\psi_k(u)$ *— простые функции, середины опорных отрезков* $\varphi_k(u), k = \overline{1, n}$ *совпадают, середины отрезков всех* $\psi_k(u)$ *также совпадают, то существует такой набор параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$*,* $m \leq 4n$*, что для определяемого ими оператора* D_{2m-2} *выполняется неравенство*

$$\|f(u) - D_{2m-2}(u, f)\| \leq \frac{459}{n} \max \left\{ \sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=1}^n b_k \right\}.$$

Сначала выпуклая функция приближалась линейной комбинацией простых треугольных функций, в свою очередь, согласно лемме 2.5, эта комбинация хорошо приближается оператором типа Джексона.

Теорема 2.3. [1] *Если* $\varphi \in VH_{2\pi}^\alpha, 0 < \alpha < 1$*, то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *справедлива оценка*

$$\|\varphi(u) - D_{2n-2}(u, \varphi)\| \leq C(\alpha) \frac{\ln n}{n}.$$

Полученные уклонения имеют тот же порядок, что и наилучшие рациональные приближения, оценки которых были найдены в работах В. А. Попова, П. П. Петрушева[1], А. А. Пекарского[2].

В **главе 3** построены рациональные операторы типа Валле Пуссена и при подходящем выборе полюсов получены точные порядковые оценки уклонений на классах функций, представимых в виде свертки.

[1]Попов, В. А. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями /В. А. Попов, П. П. Петрушев // Мат. сборник. — 1977. — Т. 103, № 6. — С. 285–292.

[2]Пекарский, А. А. Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича / А. А. Пекарский // Матем. сб. — 1982. — Т. 117, №1. — С. 114–130.

В **разделе 3.1** строятся сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена и изучаются их основные аппроксимационные свойства.

К системе чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, $|\alpha_k| < 1$ присоединим число 0 кратности n, произведение Бляшке по этим числам будет иметь вид

$$\pi_n(z) = z^n \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}.$$

Функции $K_{n,1}$, Φ_n определяем через произведение Бляшке так же, как и в главе 2, $z_j = e^{iu_j}$, $j = \overline{1,6n}$ — корни уравнения $\pi_n^3(z) - 1 = 0$. Введем сумматорный рациональный оператор типа Валле Пуссена равенством

$$V_{8n-2}(z,f) = \frac{1}{3\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{6n} \frac{f(z_j)K_n\left(z,z_j\right)}{\rho_n(z_j)},$$

где

$$K_n(z,\xi) = K_{n,2}(z,\xi) - K_{n,1}(z,\xi),$$

$$K_{n,2}(z,\xi) = \left(\frac{\pi_n^2\left(z\right)}{\pi_n^2\left(\xi\right)} + \frac{\pi_n^2\left(\xi\right)}{\pi_n^2\left(z\right)} - 2\right)\frac{z\xi}{\left(z-\xi\right)^2},$$

$$\rho_n(z) = n + z\sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(1-\overline{\alpha_k}z\right)\left(z-\alpha_k\right)}.$$

Указанный оператор каждую функцию $f(z) \in C(T)$ отображает в алгебраическую рациональную функцию порядка не выше $8n-2$. На единичной окружности оператор V_{8n-2}^{*} будет иметь представление

$$V_{8n-2}^{*}(e^{iu},f) = \sum_{j=1}^{6n} f(e^{iu_j}) \frac{\sin^2\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right) - \sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{3\Phi_n'(u)\Phi_n'(u_j)\sin^2\frac{u-u_j}{2}},$$

при $f(e^{iu}) = \varphi(u)$ полагаем $V_{4n-1}(u,\varphi) = V_{8n-2}^{*}(e^{iu},f)$, следовательно,

$$V_{4n-1}(u,\varphi) = \sum_{j=1}^{6n} \varphi(u_j) \frac{\sin^2\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right) - \sin^2\frac{1}{2}\left(\Phi_n(u)-\Phi_n(u_j)\right)}{3\Phi_n'(u)\Phi_n'(u_j)\sin^2\frac{u-u_j}{2}} =:$$

$$=: \frac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j=1}^{6n} \varphi(u_j) l_j(u).$$

V_{4n-1} — линейный оператор, его значение есть рациональная функция, являющаяся отношением тригонометрических многочленов степени не выше $4n-1$ и $2n$. Его норма как оператора из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ ограничена. Кроме того, операторы V_{8n-2}^{*} и V_{4n-1} являются точными на константах и интерполируют функции $f(z) \in C(T)$ и $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ в узлах $\{z_j\}_{j=1}^{6n}$ и $\{u_j\}_{j=1}^{6n}$ соответственно.

Будем рассматривать множество рациональных функций с полюсами в точках 0, α_k и $1/\overline{\alpha_k}$, $k=\overline{1,n}$ вида

$$r_{4n}(z)=\frac{p_{4n}(z)}{z^n\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(1-\overline{\alpha_k}z)}, \tag{2}$$

где $p_{4n}(z)$ — некоторый алгебраический многочлен степени не выше $4n$. Наилучшим приближением $\hat{R}_n(f)=\hat{R}_n(f,0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ функции $f(z)\in C(T)$ будем называть

$$\hat{R}_n(f)=\inf_{r_{4n}(z)}\|f(z)-r_{4n}(z)\|_{C(T)},$$

где инфимум берется по всем рациональным функциям (2).

Теорема 3.1.[5] *Операторы V^*_{8n-2} точны на функциях* (2).

Следствие 3.1. *Операторы V_{4n-1} точны на тригонометрических рациональных функциях вида*

$$r^T_{2n}(u)=\frac{t_{2n}(u)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+|\alpha_k|^2-2|\alpha_k|\cos(u-\arg\alpha_k)\right)}$$

и, в частности, на тригонометрических многочленах степени не выше n.

Теорема 3.2. [5] *Для функций $f(z)\in C(T)$ выполняется неравенство*

$$\|f(z)-V^*_{8n-2}(z,f)\|_{C(T)}\leq 4\hat{R}_n(f,0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

Из теоремы 3.2 следует, что при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ операторы V^*_{8n-2} и V_{4n-1} на классах $C(T)$ и $C_{2\pi}$ соответственно осуществляют аппроксимацию порядка наилучших рациональных приближений. Представляет интерес вопрос о нахождении расположений параметров, при которых уклонение операторов V_{4n-1} на конкретных функциональных классах принимает минимальный порядок.

Один из методов нахождения таких расположений предложен в **разделах 3.2** и **3.3**, которые посвящены приближению функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями из L_p либо функциями ограниченной вариации.

Пусть функция f имеет представление

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}D_r^\alpha(x-\tau)h(\tau)d\tau,\ r>0,\ -\infty<\alpha<\infty, \tag{3}$$

где

$$D_r^\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(k\tau - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

— ядро Вейля.

Если r натуральное и $\alpha = r$, то функция h является r-й производной по отношению к f. При дробных $\alpha = r$ функцию h также принято называть производной порядка r по отношению к f.

Функциональный класс, определяемый с помощью формулы (3) при условии $h \in L_p$, $\|h\|_{L_p} \le 1$, $p \ge 1$, $r > 1/p$, обозначим через $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$. Если h — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$ и $V(h, [0, 2\pi]) \le 1$, то через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ обозначаем класс функций, определенных формулой (3), через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ — класс функций, представимых интегралом Стилтьеса

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x-\tau)dh(\tau),\ r > 0, -\infty < \alpha < \infty. \tag{4}$$

Классы $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ принадлежат пространству $C_{2\pi}$.

Теорема 3.3. [7, 13, 14] *Если $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ справедлива оценка*

$$\|f(u) - V_{4n-1}(u, f)\| \le \frac{C(r,p)}{n^r}.$$

Теорема 3.4. [5, 13] *Если функция $f(u)$ принадлежит классам $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ или $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ справедлива оценка*

$$\|f(u) - V_{4n-1}(u, f)\| \le \frac{C(r)}{n^{r+1}}.$$

Такие оценки для наилучших рациональных приближений на классах $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, а также $W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$ при $r = 1, p > 1$ или $r > 1, p \ge 1$ впервые были найдены В. Н. Русаком в 1985[3] и 1990[4] годах. Как отметил профессор А. А. Пекарский, оценки приближений функций с дробной производной Вейля могут быть получены в качестве следствий теорем, относящихся к аппроксимации пространств Харди–Соболева в единичном круге[5].

[3] Русак, В. Н. Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свёртки / В. Н. Русак // Матем. сборник.— 1985.— Т. 128, №4. — С. 492–515.

[4] Русак, В. Н. Точные порядки наилучших рациональных приближений свёртки ядра Вейля и функций из L_p / В. Н. Русак// ДАН СССР.— 1990.— Т. 315, №2. — С. 313–316.

[5] Пекарский, А. А. Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p / А. А. Пекарский// Матем. сб. — 1985. — Т. 127, №1. — С. 3–20.

Используя этот подход, А. П. Старовойтов[6], в частности, обобщил результат В. Н. Русака для $W_{2\pi}^{r,\pm r}L_p$ на случай $r > 1/p$, $p \geq 1$.

Аппаратом приближения дробных интегралов Вейля в работах В. Н. Русака являлись построенные им интегральные рациональные операторы типа Валле Пуссена. В настоящей диссертации вместо оценки интегралов приходится иметь дело с оценкой сумм, что является технически более сложной задачей, поэтому наряду с модификациями методов, предложенными В. Н. Русаком, были задействованы новые подходы. Так, существенно использовались принцип аналитического продолжения, теория вычетов, специальные приемы оценки контурных интегралов и сумм.

Для примера опишем способ выбора параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, при котором происходит оценка уклонения в случае $f \in W_{2\pi}^{r,\alpha}L_p$, $1/p < r < 1$. Для данного натурального n возьмем натуральное η такое, что $1 < \ln_\eta n = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{\eta\,\text{раз}} n \leq e$. Сделаем η разбиений отрезка $[0, 2\pi]$ точками t_k^μ, $k = \overline{1, n_\mu + 1}$, $\mu = \overline{1, \eta}$ по правилу

$$0 = t_1^\mu < t_2^\mu < \ldots < t_{n_\mu+1}^\mu = 2\pi,$$

$$t_{k+1}^\mu = \max\left\{t : t_k^\mu < t \leq 2\pi, t - t_k^\mu \leq \frac{b\ln_\mu^3 n}{n}, \int_{t_k^\mu}^t |h(x)|^p \, dx \leq \frac{b\ln_\mu^3 n}{n}\right\},$$

где $b = b(r, p)$ — специальным образом сформированная положительная константа. Точками μ-го ранга будем называть совокупность точек разбиений с первого по μ-е включительно, $0 = \tau_1^\mu < \tau_2^\mu < \ldots < \tau_{m_\mu+1}^\mu = 2\pi$. На каждом радиальном луче $\arg\theta = \tau_l^\mu$, $\mu = \overline{2, \eta}$ разместим по $2N_\mu$, $N_\mu = \left[((18r + 6)\ln_\mu n/(r - 1/p))^2 + 1\right]$ параметров α_k в точках

$$\left(1 - \left(\tau_l^\mu - \tau_{l-1}^\mu\right) e^{-\frac{k}{\sqrt{N_\mu}}}\right) e^{i\tau_l^\mu}, k = \overline{1, N_\mu},\ l = \overline{2, m_\mu + 1},$$

$$\left(1 - \left(\tau_{l+1}^\mu - \tau_l^\mu\right) e^{-\frac{k}{\sqrt{N_\mu}}}\right) e^{i\tau_l^\mu},\ k = \overline{1, N_\mu},\ l = \overline{1, m_\mu}.$$

Также разместим по $N_1 = \left[(3r(1 + 4p/(rp - 1))\ln n)^2 + 1\right]$ параметров α_k на каждом радиальном луче $\arg\theta = \tau_l^1$, $l = \overline{1, m_1}$ в точках

$$\left(1 - 0,5e^{-\frac{k}{\sqrt{N_1}}}\right) e^{i\tau_l^1},\ k = \overline{1, N_1}.$$

Приведем две леммы, которые лежат в основе доказательства теоремы 3.3.

[6]Старовойтов, А. П. Рациональные приближения дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля / А. П. Старовойтов // Матем. заметки. — 2005. — Т. 87, № 3. — С. 428–441.

Лемма 3.14. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *находится* ν_η *точек разбиения последнего ранга, точка* u *не принадлежит отрезку* $[a,b]$, $d(u)=\min\left\{\left|\sin\frac{u-a}{2}\right|,\left|\sin\frac{u-b}{2}\right|\right\}>0$. *Тогда*

1. если функция $\Phi_n'(\theta)$ *на отрезке* $[a,b]$ *удовлетворяет неравенству* $\Phi_n'(\theta)\ge A_n$, *то*

$$\sum_{a\le u_j\le b}|l_j(u)|\le C_1\left(\frac{b-a}{d(u)^2}+\frac{\nu_\eta}{A_n d(u)^2}\right);$$

2. если на отрезке $[a,b]$ $\Phi_n'(\theta)\ge A_n/\left|\sin\left((u-\theta)/2\right)\right|$, *то*

$$\sum_{a\le u_j\le b}|l_j(u)|\le C_2\left(\frac{\nu_\eta}{A_n d\left(u\right)}+\frac{1}{d\left(u\right)}\right).$$

Лемма 3.15. *Пусть* τ_k^μ *и* τ_{k+1}^μ *— соседние точки* μ*-го ранга,* $\tau<\tau_k^\mu$, $h=\tau_{k+1}^\mu-\tau_k^\mu$ *при* $2\le\mu<\eta$ *или* $h=1/2$ *при* $\mu=1$, *причем при* $2\le\mu<\eta$ *точка* τ *принадлежит тому же отрезку* $\mu-1$*-го ранга, что и* τ_k^μ, $d(u)=\min\left\{\left|\sin\frac{u-\tau_k^\mu}{2}\right|,\left|\sin\frac{u-\tau_{k+1}^\mu}{2}\right|\right\}\ge 2he^{-\sqrt{N_\mu}}$. *Тогда при* $0<r<1$ *имеет место соотношение*

$$\left|\sum_{\tau_k^\mu\leqslant u_j<\tau_{k+1}^\mu}\left(D_r^\alpha(u-\tau)-D_r^\alpha(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|\le$$
$$\le C_3\frac{\left(\left|D_r^\alpha(u-\tau)\right|+\left|\tau_k^\mu-\tau\right|^{r-1}\right)he^{-\frac{\sqrt{N_\mu}}{3}}}{d(u)^2}.$$

При оценке уклонения $|f(u)-V_{4n-1}(u,f)|$ слагаемые, соответствующие тем u_j, которые близки к u, оцениваются на основании свойств ядер Вейля, к остальным слагаемым применяются леммы 3.14 и 3.15.

Глава 4 посвящена сумматорным рациональным операторам типа Лагранжа и их приложениям к построению квадратурных формул и решению интегральных уравнений.

В **разделе 4.1** построены операторы типа Лагранжа и изучены их аппроксимационные свойства.

Как и ранее, через

$$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^n\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$$

обозначаем произведение Бляшке по системе точек $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $|\alpha_k|<1$, Φ_n — аргумент произведения Бляшке, $\Phi_n(u)=\arg\pi_n(e^{iu})$, точки $\{u_j\}_{j=0}^{2n}$ — нули функции $\sin\left(\Phi_n(u)+u/2\right)$.

Пусть $q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{-ix} - \overline{\alpha_k}\right)\left(e^{ix} - \alpha_k\right)$. Через Q_n, Q_{2n} и $\widetilde{Q}_{2n}$ будем обозначать соответственно множества $\{p_n(x)/q_n(x)\}$, $\{p_{2n}(x)/q_n^2(x)\}$, $\{p_{2n}(x)/q_n(x)\}$ тригонометрических рациональных функций с фиксированным знаменателем, где $p_n(x)$ и $p_{2n}(x)$ есть некоторые тригонометрические многочлены степени не выше n и $2n$.

Для любой функции $f(u) \in C_{2\pi}$ построим интерполяционный рациональный оператор L_n, полагая

$$L_n(u,f) = \sum_{j=0}^{2n} f(u_j) \frac{\sin\left(\Phi_n(u) + \frac{u}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right)}{\sin\frac{u-u_j}{2}\left(1 + 2\Phi_n'(u_j)\right)}.$$

Значениями оператора L_n являются тригонометрические рациональные функции из Q_n, он интерполирует функцию $f(u) \in C_{2\pi}$ в точках $\{u_j\}_{j=0}^{2n}$, а также является точным на множестве Q_n.

Если к числам $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ присоединить число 0 кратности n, то по полученной системе параметров подобно оператору L_n можно построить оператор

$$L_{2n}(u,f) = \sum_{j=0}^{4n} f(u_j) \frac{\sin\left(\Phi_n(u) + \frac{u}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right)}{\sin\frac{u-u_j}{2}\left(1 + 2\Phi_n'(u_j)\right)},$$

где $\{u_j\}_{j=0}^{4n}$ — нули функции $\sin\left(\Phi_n(u) + u/2\right)$. Значениями оператора L_{2n} являются тригонометрические рациональные функции из $\widetilde{Q}_{2n}$, он интерполирует функцию $f(u) \in C_{2\pi}$ в точках $\{u_j\}_{j=0}^{4n}$, является точным на множестве $\widetilde{Q}_{2n}$, а следовательно, и на множестве тригонометрических многочленов степени не выше n.

В **разделе 4.2** исследуется приближение операторами L_{2n} функций классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ и $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$.

Теорема 4.1. [6] *Если функция $f(u)$ принадлежит классам $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ или $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ справедлива оценка*

$$\|f(u) - L_{2n}(u,f)\| \le C(r)\frac{\ln^3 n}{n^{r+1}}. \tag{5}$$

Отметим, что интегральные аналоги операторов L_{2n} — рациональные операторы типа Фурье, построенные В. Н. Русаком, на данных классах обеспечивают приближение порядка $O\left(\ln n/n^{r+1}\right)$. Нормы обоих операторов имеют как минимум логарифмический рост по отношению к n, чем объясняется множитель $\ln n$ в оценке уклонения. Однако в случае сумматорных операторов удовлетворительную оценку нормы удается получить только при относительно простых расположениях параметров $\{\alpha_k\}$, и это ограничение в выборе параметров не позволило снять множитель $\ln^2 n$ в оценке (5).

В **разделе 4.3** на основании операторов L_n построены квадратурные формулы типа Гаусса, которые, в свою очередь, применяются к приближенному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Для функции $f \in C_{2\pi}$ рассмотрим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^{2\pi} f(u)du \approx \sum_{j=0}^{2n} A_j f(u_j),\ A_j = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\Phi_n(u) + \frac{u}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right)}{\sin\frac{u-u_j}{2}\left(1 + 2\Phi'_n(u_j)\right)} du. \quad (6)$$

Доказывается, что данная квадратурная формула является точной для всякой тригонометрической рациональной функции $r_n \in Q_n$, ее коэффициенты $A_j,\ j = \overline{0,2n}$ положительны и $A_j = \frac{2\pi}{2\Phi'_n(u_j)+1}$, причем выполняется равенство $\sum_{j=0}^{2n} A_j = 2\pi$.

Для функции $f \in C_{2\pi}$ определим наилучшее равномерное приближение тригонометрическими рациональными функциями из Q_n и Q_{2n}, полагая

$$\hat{R}_n^T(f) = \inf\left(\|f - r_n\|, r_n \in Q_n\right),$$

$$\hat{R}_{2n}^T(f) = \inf\left(\|f - r_{2n}\|, r_{2n} \in Q_{2n}\right).$$

Теорема 4.2. [2, 4, 10, 12] *Квадратурная формула* (6) *точна для рациональных функций из множества* Q_{2n} *и справедлива оценка для ее погрешности*

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} f(u)du - \sum_{j=0}^{2n} A_j f(u_j)\right| \le 4\pi \hat{R}_{2n}^T(f).$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} h(s,t)x(t)dt = y(s), \quad (7)$$

где $y(s) \in C_{2\pi}$ — известная функция, ядро $h(s,t)$ имеет период 2π по каждой переменной и непрерывно по совокупности переменных. Заменяя интеграл в левой части равенства (7) по квадратурной формуле (6) и требуя выполнения этого равенства только в узловых точках $\{u_k\}_{k=0}^{2n}$, придем к системе линейных алгебраических уравнений

$$z_k - \lambda \sum_{j=0}^{2n} A_j h(u_k, u_j) z_j = y(u_k),\ k = \overline{0,2n}, \quad (8)$$

решение которой определяет приближенные значения для решения уравнения (7) в узловых точках. Под приближенным решением для всех значений

s будем понимать рациональную функцию, определенную через $\{z_k\}_{k=0}^{2n}$ посредством интерполяционного оператора L_n,

$$z(s) = \sum_{j=0}^{2n} z_j \frac{\sin\left(\Phi_n(s) + \frac{s}{2}\right)\cos\left(\Phi_n(u_j) + \frac{u_j}{2}\right)}{\sin\frac{s-u_j}{2}\left(1 + 2\Phi_n'(u_j)\right)}. \tag{9}$$

Систему (8) также можно записать в операторной форме

$$\widetilde{K}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(u_0) \\ y(u_1) \\ \dots \\ y(u_{2n}) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_{2n} \end{bmatrix} = \widetilde{K}^{-1}\begin{bmatrix} y(u_0) \\ y(u_1) \\ \dots \\ y(u_{2n}) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\widetilde{K}$ — линейный оператор в пространстве R^{2n+1} и $\widetilde{K}^{-1}$ — соответствующий обратный оператор в том же пространстве. Интегральное уравнение (7) также запишем в оператором виде $Kx = y$, где K — линейный оператор в пространстве $C_{2\pi}$ и $\|K\|$ есть его норма как оператора из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$.

Будем предполагать, что ядро $h(s,t)$ можно аппроксимировать рациональными функциями из множества Q_n по каждой переменной, т. е. существуют функции

$$h_1(s,t) = \left(\frac{a_0'(s)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k'(s)\cos kt + b_k'(s)\sin kt\right) \Big/ q_n(t),$$

$$h_2(s,t) = \left(\frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k''(t)\cos ks + b_k''(t)\sin ks\right) \Big/ q_n(s)$$

с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами, и для этих функций выполнены неравенства

$$|h(s,t) - h_1(s,t)| \le \hat{R}^T_{\infty,n}(h), |h(s,t) - h_2(s,t)| \le \hat{R}^T_{n,\infty}(h), 0 \le s,t \le 2\pi.$$

Теорема 4.3. [4, 10, 12] *Если $x(s)$ — точное решение уравнения (7) и $z(s) \in Q_n$ — приближенное решение, найденное из (8), (9), то справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \|x(s) - z(s)\|_{C_{2\pi}} \le \\ \le \left(\|L_n\| \cdot \left\|\widetilde{K}^{-1}\right\| \cdot \|K\| + 1\right)\left(\hat{R}^T_n(y) + 2\pi|\lambda|\,\hat{R}^T_{n,\infty}(h)\,\|x\|\right) + \\ +4\pi\|L_n\| \cdot |\lambda| \cdot \left\|\widetilde{K}^{-1}\right\| \hat{R}^T_{\infty,n}(h)\left(\hat{R}^T_n(y) + \|x\|\left(1 + 2\pi|\lambda|\,\hat{R}^T_{n,\infty}(h)\right)\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Все величины, входящие в правую часть (11), ограничены, кроме нормы $\|L_n\|$ интерполяционного оператора, которая в ряде важных случаев имеет логарифмический рост по отношению к n. Названная правая часть существенно зависит от параметров $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$, которые выбираются в зависимости от свойств ядра $h(s,t)$ и правой части $y(s)$ интегрального уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В данной диссертации:

1. Построены сумматорные рациональные операторы типа Джексона, оценена скорость сходимости к функциям из $C_{2\pi}$ в терминах модулей непрерывности, при подходящем выборе полюсов получены точные порядковые оценки уклонений на классах кусочно-выпуклых функций и гельдеровских функций ограниченной вариации [1, 3, 9, 11].
2. Построены сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена и при подходящем выборе полюсов получены точные порядковые оценки уклонений на классах периодических функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями из L_p либо функциями ограниченной вариации [5, 7, 8, 13, 14].
3. Построены интерполяционные рациональные операторы типа Лагранжа, при подходящем выборе полюсов получены порядковые оценки уклонений для периодических функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями ограниченной вариации [2, 4, 6, 10, 12].
4. На основании интерполяционных операторов типа Лагранжа получены квадратурные формулы, точные на рациональных тригонометрических функциях порядка $2n$, предложен алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода и найдена оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших тригонометрических рациональных приближений ядра и правой части интегрального уравнения [2, 4, 10, 12].

Полученные оценки уклонений операторов типа Джексона и Валле Пуссена совпадают по порядку с наилучшими рациональными приближениями рассмотренных функциональных классов. Рациональные операторы типа Лагранжа осуществляют приближение, отличающееся от наилучшего рационального лишь логарифмическим множителем.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они получены с использованием новых методов или в результате дальнейшего развития уже известных подходов и могут быть использованы при решении других задач, в частности, при получении прямых теорем рациональной аппроксимации в различных функциональных пространствах. Полученные результаты могут быть также полезны в учебном процессе при чтении спецкурсов по теории аппроксимации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Рецензируемые статьи

1. Гриб, Н. В. Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных 2π-периодических функций / Н. В. Гриб // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2011. — №1. — С. 17–24.

2. Русак, В. Н. Рациональная интерполяция и квадратурные формулы для периодических функций / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Вестник БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. — 2011. — № 2. — С. 102–106.

3. Гриб, Н. В. Приближение сумматорными рациональными операторами 2π-периодических кусочно-выпуклых функций / Н. В. Гриб // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2012. — №2. — С. 15–24.

4. Русак, В. Н. Рациональная интерполяция и приближенное решение интегральных уравнений / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т.48, № 2. — С. 266–273.

5. Гриб, Н. В. Аппроксимация функций, представимых в виде свертки / Н. В. Гриб // Весці БДПУ. Серыя 3. — 2012. — № 2. — С. 28–32.

6. Гриб, Н. В. Аппроксимация функций с дробной производной Вейля интерполяционными рациональными операторами / Н. В. Гриб // Весці БДПУ. Серыя 3. — 2013. — № 2. — С. 16–20.

7. Гриб, Н. В. О рациональной аппроксимации дробных интегралов Вейля / Н. В. Гриб // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2013. — №4. — С. 92–100.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

8. Гриб, Н. В. Сумматорные рациональные операторы типа Фейера на единичной окружности / Н. В. Гриб // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : материалы 5-й междунар. конф., Минск, 14–19 сент. 2009 г. : в двух томах / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2010. — Т.1. Математический анализ. — С. 46–51.

9. Гриб, Н. В. Рациональная аппроксимация периодических кусочно-выпуклых функций / Н. В. Гриб // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : материалы 6-й междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. : в двух томах / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2012. — Т.1. Математический анализ. — С. 53–58.

10. Русак, В. Н. Интерполяционные рациональные операторы и приближенное решение интегральных уравнений / В. Н. Русак, Н. В. Гриб // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : материалы 6-й междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. : в двух томах / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2012. — Т.1. Математический анализ. — С. 112–120.

Тезисы докладов

11. Гриб, Н. В. Порядковые оценки приближения 2π-периодических кусочно-выпуклых функций сумматорными рациональными операторами / Н. В. Гриб // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2011. — С. 49.

12. Русак, В. Н. Приближенное решение интегральных уравнений на основе рациональной интерполяции / В. Н. Русак, Н. В. Гриб //Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2011. — С. 129.

13. Гриб, Н. В. О рациональной аппроксимации периодических функций, представимых в виде свертки / Н. В. Гриб // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. междунар. науч. семинара, Минск, 10–14 сент. 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2012. — С. 23.

14. Гриб, Н. В. Порядок рациональной аппроксимации сверток ядра Вейля и функций из L_p / Н. В. Гриб // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г. : в 4 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2012. — Ч.1. — С. 6.

РЕЗЮМЕ

Гриб Николай Васильевич

Аппроксимация рациональными операторами с предписанными полюсами

Ключевые слова: Пространство $C_{2\pi}$, произведение Бляшке, сумматорные рациональные операторы типа Джексона, Валле Пуссена, Лагранжа, наилучшее рациональное приближение, прямая теорема рациональной аппроксимации, дробная производная в смысле Вейля, квадратурная формула типа Гаусса, интегральное уравнение Фредгольма.

Целью диссертационной работы является получение порядковых оценок уклонений сумматорных рациональных операторов на конкретных классах функций из пространства $C_{2\pi}$, построение на основании интерполяционных рациональных операторов квадратурных формул типа Гаусса и их приложение к приближенным решениям интегральных уравнений. Были использованы общие методы вещественного анализа, а также специальные приемы оценки контурных интегралов, содержащих произведение Бляшке.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Построены сумматорные рациональные операторы типа Джексона, оценена скорость сходимости к функциям из $C_{2\pi}$ в терминах модулей непрерывности, при подходящем выборе полюсов получены точные порядковые оценки уклонений на классах кусочно-выпуклых функций и гельдеровских функций ограниченной вариации.

2. Построены сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена в пространстве $C_{2\pi}$ и при подходящем выборе полюсов получены точные порядковые оценки уклонений для дробных интегралов Вейля.

3. Построены интерполяционные рациональные операторы типа Лагранжа в пространстве $C_{2\pi}$, при подходящем выборе полюсов получены порядковые оценки уклонений для функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями ограниченной вариации.

4. На основании интерполяционных операторов получены квадратурные формулы типа Гаусса, предложен алгоритм приближенного решения интегральных уравнений второго рода и найдена оценка погрешности приближенного решения в терминах наилучших тригонометрических рациональных приближений ядра и правой части интегрального уравнения.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они получены с использованием новых методов или путем дальнейшего развития уже известных подходов и могут быть использованы при решении других задач, в частности, при получении прямых теорем рациональной аппроксимации.

РЭЗЮМЭ

Грыб Мікалай Васільевіч

Апраксімацыя рацыянальнымі аператарамі з прадпісанымі полюсамі

Ключавыя словы: Прастора $C_{2\pi}$, здабытак Бляшке, суматорныя рацыянальныя аператары тыпу Джэксана, Вале Пусэна, Лагранжа, найлепшае рацыянальнае набліжэнне, прамая тэарэма рацыянальнай апраксімацыі, дробная вытворная в сэнсе Вейля, квадратурная формула тыпу Гауса, інтэгральнае раўнанне Фрэдгольма.

Мэтай дысертацыйнай работы з'яўляецца атрыманне парадкавых ацэнак ухіленняў суматорных рацыянальных аператараў на канкрэтных класах функцый з прасторы $C_{2\pi}$, пабуова на аснове інтэрпаляцыйных рацыянальных аператараў квадратурных формул тыпу Гауса і іх прыкладанне да набліжаных рашэнняў інтэгральных раўнанняў. Былі выкарыстаны агульныя метады рэчаіснага аналізу, а таксама спецыяльныя прыёмы ацэнкі контурных інтэгралаў, якія змяшчаюць здабытак Бляшке.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Пабудаваны суматорныя рацянальныя аператары тыпу Джэксана, ацэнена хуткасць збежнасці да функцый з $C_{2\pi}$ у тэрмінах модуляў непарыўнасці, пры падыходзячым выбары полюсаў атрыманы дакладныя парадкавыя ацэнкі ўхіленняў на класах кускова-выпуклых функцый і гёльдэраўскіх функцый абмежаванай варыяцыі.

2. Пабудаваны суматорныя рацыянальныя аператары тыпу Вале Пусэна ў прасторы $C_{2\pi}$ і пры падыходзячым выбары полюсаў атрыманы дакладныя парадкавыя ацэнкі ўхіленняў для дробных інтэгралаў Вейля.

3. Пабудаваны інтэрпаляцыйныя рацыянальныя аператары тыпу Лагранжа ў прасторы $C_{2\pi}$, пры падыходзячым выбары полюсаў атрыманы дакладныя парадкавыя ацэнкі ўхіленняў для згортак ядра Вейля і функцый абмежаванай варыяцыі.

4. На аснове інтэрпаляцыйных аператараў атрыманы квадратурныя формулы тыпу Гауса, прапанаваны алгарытм набліжанага рашэння інтэгральных раўнанняў другога роду і знойдзена ацэнка хібнасці набліжанага рашэння ў тэрмінах найлепшых трыганаметрычных рацыянальных набліжэнняў ядра і правай часткі інтэгральнага раўнання.

Вынікі дысертацыі маюць тэарэтычны характар. Яны атрыманы з выкарыстаннем новых метадаў ці шляхам далейшага развіцця ўжо вядомых падыходаў і могуць быць выкарыстаны пры рашэнні іншых задач, у прыватнасці, пры атрыманні прамых тэарэм рацыянальнай апраксімацыі.

SUMMARY

Grib Nikolay

Approximation by rational operators with prescribed poles

Keywords: $C_{2\pi}$ space, Blaschke product, summational rational operators of Vallee Poussin, Jackson, Lagrange type, best rational approximation, direct theorem of approximation theory, fractional derivative in sense of Weyl, Gauss quadrature formula, Fredholm integral equation.

The purpose of this thesis is obtain order estimates of summation rational operators evasion for specific functional classes from $C_{2\pi}$ space, build Gauss' quadrature formulas based on rational interpolation operators and their application to solution of integral equations. In a thesis are used common methods of real analysis and special techniques of estimation of contour integrals containing a Blaschke product.

The following results were obtained:

1. Summation rational operators of Jackson is constructed, the convergence rate on the functions from $C_{2\pi}$ space in terms of the continuity modules is estimated, exact order estimates of evasion for a suitable choice of poles on piecewise-convex functions and Holder's functions of bounded variation is obtained.

2. Summation rational operators of Vallee Poussin in $C_{2\pi}$ space is constructed and exact order estimates of evasion for a suitable choice of poles on Weyl's fractional integral is obtained.

3. Interpolation rational operators of Lagrange in $C_{2\pi}$ space is constructed and for a suitable choice of poles order estimates of evasion on functions representable in the form of convolution the Weyl's kernel with functions of bounded variation is obtained.

4. Gauss' quadrature formulas based on rational interpolation operators is constructed, the algorithm of the approximate solution of the second kind integral equations is offered and an estimate for the error of the approximate solutions in terms of best rational trigonometric approximations of the kernel and the right part of the integral equation is found.

Results of the thesis is theoretical. They are obtained using the new method or by the further development of already known methods and can be used for a solution of other problems, in particular, for proving direct theorems of rational approximation.