Тэма 3 Асновы квантавай механікі

Пытанні:

1. Хвалі дэ-Бройля. Доследы па дыфракцыі электронаў.
2. Прынцып невызначанасці Гейзенберга. Уяўныя доследы Гейзенберга.
3. Хвалевая функцыя і яе фізічны сэнс.
4. Раўнанне Шродзінгера.
5. Квантаванне энергіі часціцы ў патэнцыяльнай яме.
6. Квантаванне энергіі лінейнага гарманічнага асцылятара.
7. Праходжанне часціцы праз патэнцыяльны бар'ер (тунельны эфект).

1. Хвалі дэ-Бройля. Доследы па дыфракцыі электронаў.

Велічыні, якія характарызуюць часціцу: імпульс і энергія.

$$p=mc; \qquad \varepsilon=mc^2; \qquad m=\varepsilon/c^2; \qquad p=\varepsilon/c;$$

$$\varepsilon=h\nu; \qquad \varepsilon=hc/\lambda$$

Такім чынам, $p=h/\lambda$ - гэта паказвае, што велічыня, якая характарызуе часціцу (імпульс p) звязана з велічынёй, якая характарызуе святло ($p\sim1/\lambda$).

Калі нейкая часціца з масай m рухаецца з v, то $p=m\upsilon$ і згодна $p=h/\lambda$ можна запісаць $m\upsilon=h/\lambda \Rightarrow$

$$\lambda=h/m\upsilon$$ – хваля дэ-Бройля.

Макраскапічным часціцам, напрыклад, $m=1мг=10^{-6}кг$; $\upsilon=1$ м/с; $\lambda\approx6\cdot10^{-28}м$ немагчыма назіраць, так як няма такой структуры, на якой назіралася б дыфракцыя такіх хваль (пастаянная крыштальнай рашоткі $d\sim10^{-10}м$).

$$eU=\frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow \upsilon=\sqrt{2eU/m}\,; \quad \lambda=\frac{h}{m\upsilon}=\frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

для элекрона: $e=1{,}6\cdot10^{-19}Кл$

$m=9{,}1\cdot10^{-31}кг$

$\lambda=\frac{1{,}2}{\sqrt{U}}\cdot10^{-9}$ м, калі U~50 В; $\lambda\approx0{,}2$ Нм, што параўнальна з пастаяннай крышталя.

Для такога электрона павінна назірацца з'ява дыфракцыі.

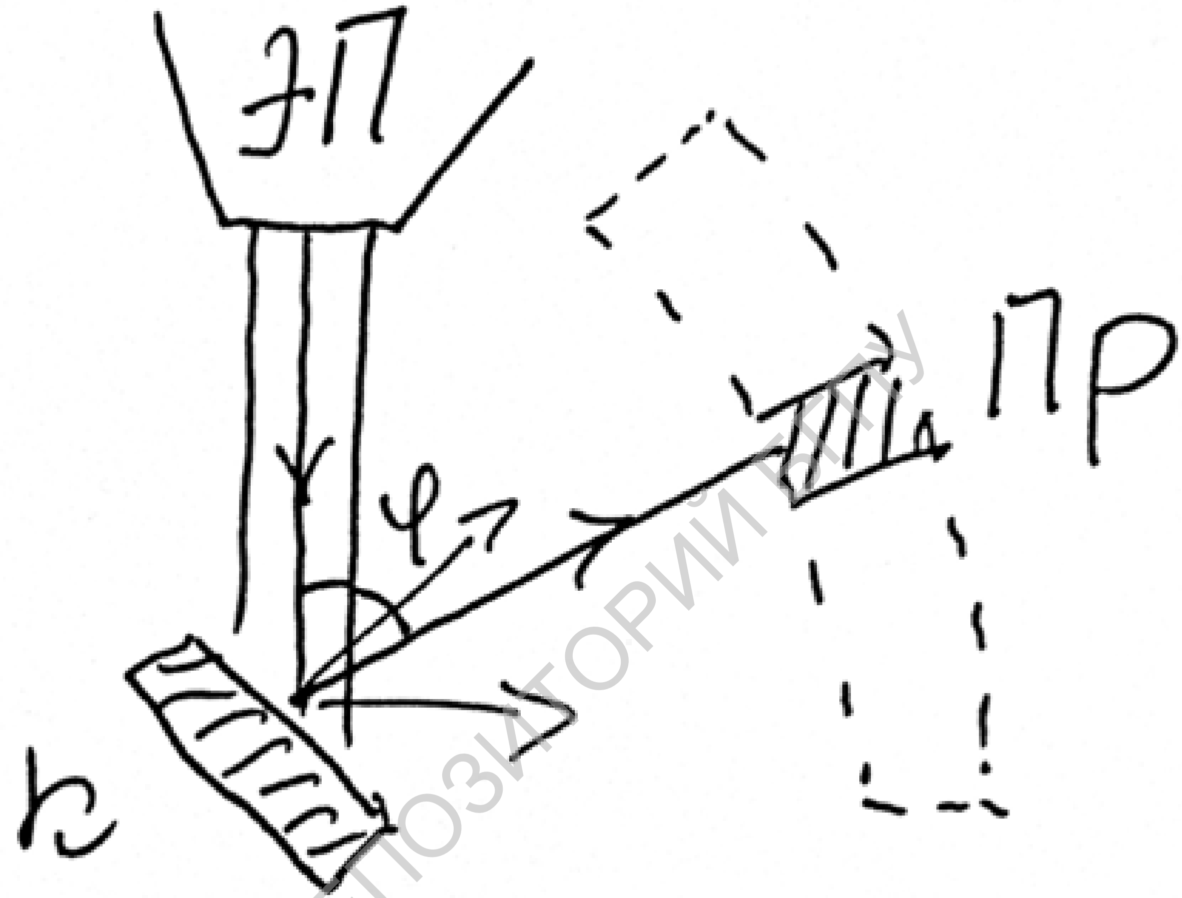
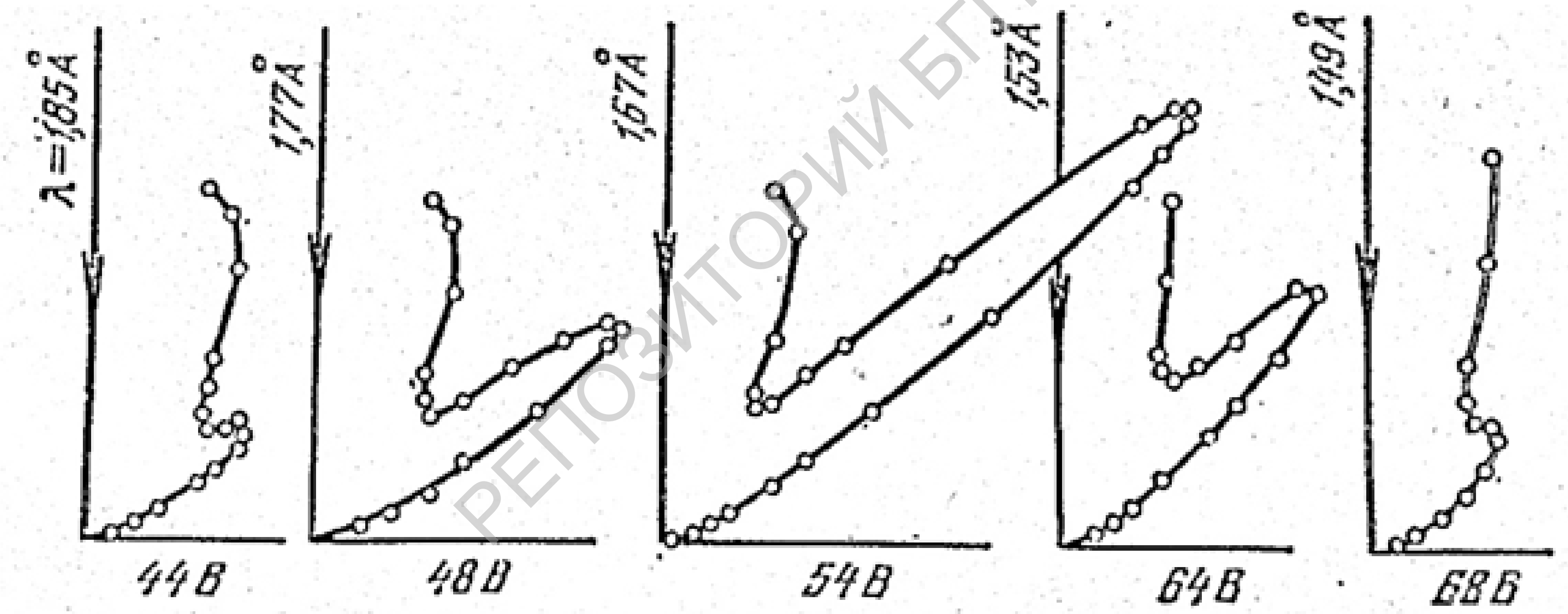


Схема установкі: ЭП – пучок электронаў, К – крышталь Пр – прыёмнік, які злучаны з гальванометрам; усё ў вакуумнай камеры, φ - вугал атражэння ад атамных пласкасцей.

Інтэнсіўнасць пучка, які атражаецца ацэньвалася па сіле тока, які цячэ праз гальванометр.

Мяняліся вугал φ і хуткасць электронаў $\upsilon \sim \sqrt{U}$. На малянку показанана завісімасць I(φ).



Ведаючы з эксперыменту вугал слізгання φ, пастаянную рашоткі крышталя d, з раўнання Вульфа-Брэгга можна вызначыць λ, якая адпавядае электроннаму пучку: $2d\sin\gamma = n\lambda$;

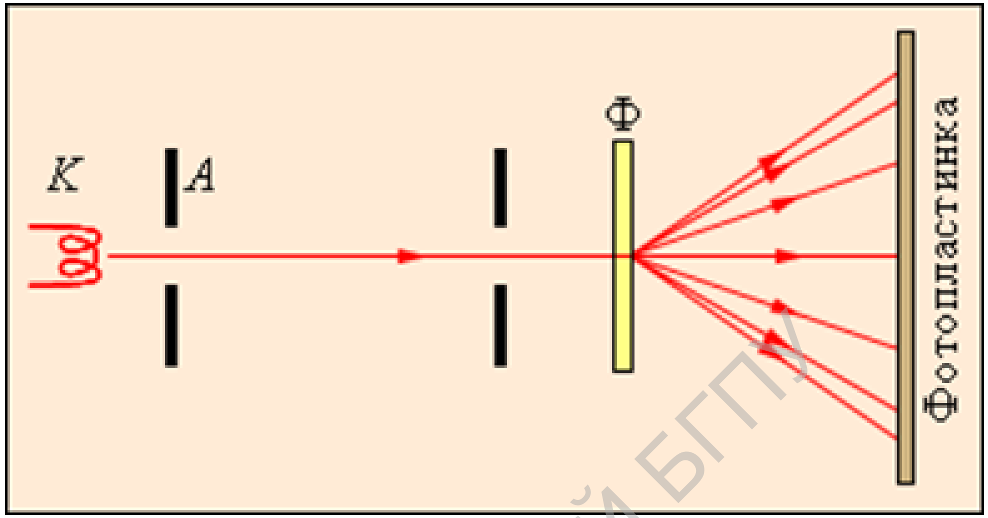
$$\lambda = \frac{2d\sin\gamma}{n} \approx 1{,}65 A \approx\sim 0{,}165 Нм$$

где $\gamma = \pi/2 - \varphi/2$.

А ведаючы U пушкі і парамеры электрона (e, m) па формуле

$$\lambda = 1{,}2/\sqrt{U}; \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}} \approx 1{,}67 A$$

можна вызначыць λ таксама пучка.



Упрощенная схема опытов Дж. Томсона по дифракции электронов. *K* – накаливаемый катод, *A* – анод, Ф – фольга из золота.

Картина дифракции электронов на поликристаллическом образце при длительной экспозиции (a) и при короткой экспозиции (b). В случае (b) видны точки попадания отдельных электронов на фотопластинку.

$$\lambda = 2\sin\theta / n$$

2. Прынцып невызначанасці Гейзенберга. Уяўныя доследы Гейзенберга

Асноўныя палажэнні квантавай фізікі:

1. Квантавая часціца разглядаецца як непадзельнае цэлае.
2. Яна валодае як уласцівасцямі хвалі, так і часціцы $P=h/\lambda$.
3. Для квантавай часціцы немагчыма дакладна вызначыць каардынаты і імпульс, час і энергію.
4. Для квантавай часціцы прымяненне паняцця траекторыі абмежавана.
5. Квантавая механіка не мае нагляднасці. Яе механічныя мадэлі з'яўляюцца недасканальнымі, нерэальнымі.
6. Паводзіны квантавай часціцы апісваюцца так званай хвалевай функцыяй.
7. Законы квантавай механікі носяць імавернасны характар.

Здабытак невызначальнасці каардынаты часціцы ΔX на невызначальнасць праекцыі імпульса на дадзены напрамак ΔP_x не можа быць па парадку велічыні менш за пастаянную Планка $\hbar$.

$$\Delta X \cdot P_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1)$$

$$\Delta X \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (2)$$

$$\Delta Z \Delta P_z \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (3)$$

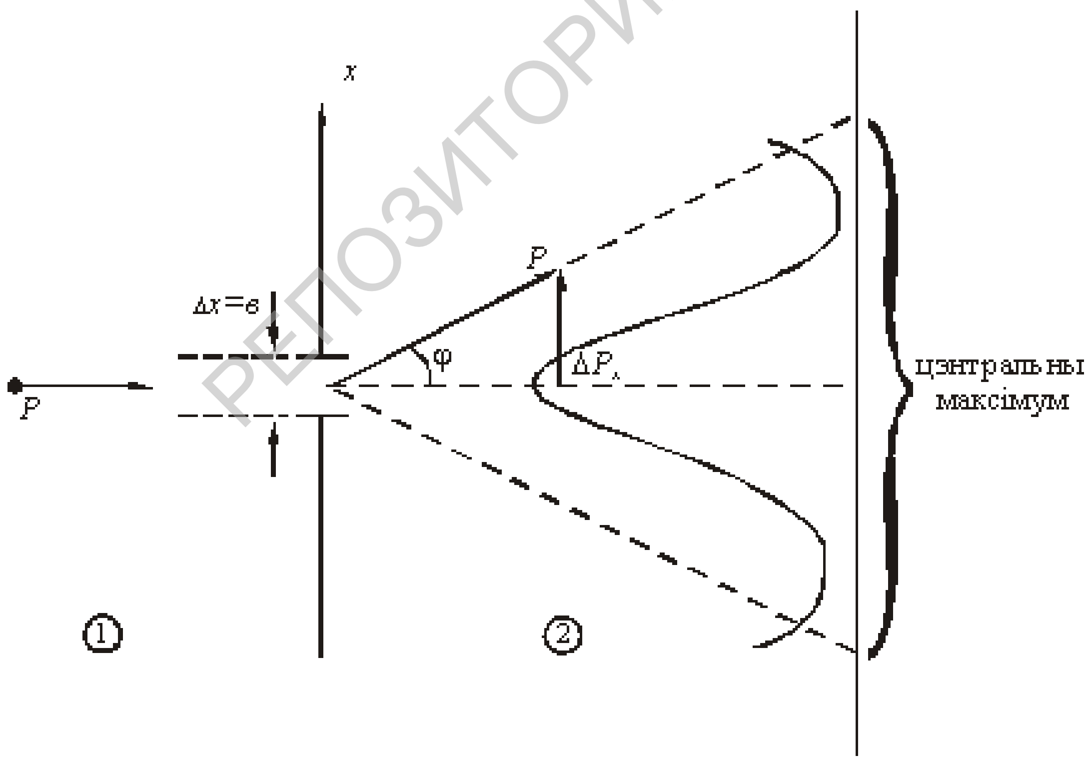
Ведаючы сувязь паміж імпульсам і энергіяй, можна запісаць:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

дзе ΔE – невызначальнаць энергіі; Δt – невызначальнасць часу.

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{2\Delta t},$$

калі ΔE – малое, то Δt – вялікае.



1. Да шчыліны $\Delta P_x=0$, г. зн. P ведаем дакладна, а Δx – невызначана.
2. Часціца знаходзіцца ў шчыліне; назіраецца з'ява дыфракцыі над вуглом φ.

$$\Delta P_x = P\sin\varphi;$$

$$b\sin\varphi = k\lambda, \quad \text{дзе } \Delta x = b;$$

$$P = h/\lambda;$$

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{2\pi\hbar}{P}; \quad \lambda = \frac{b\sin\varphi}{k} = \frac{\Delta x\sin\varphi}{k}$$

$$\frac{\Delta x\sin\varphi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\Delta P_x/\sin\varphi} \Rightarrow \Delta x\cdot\Delta P_x \approx 2\pi\hbar$$

Однако, при определенных условиях соотношение неопределенностей не противоречит классическому описанию движения тел, в том числе и микрочастиц. Например, электронный пучок в кинескопе телевизора при вылете из электронной пушки имеет диаметр Δy порядка 10^{-3} см. В современном телевизоре ускоряющее напряжение $U \approx 15$ кВ. Легко подсчитать импульс электрона: $P = 6{,}6 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с. Этот импульс направлен вдоль оси трубки.

Из соотношения неопределенностей следует, что электронам при формировании пучка сообщается неконтролируемый импульс ΔP_x, перпендикулярный оси пучка: $\Delta P_x \approx h / \Delta x \approx 6{,}6 \cdot 10^{-29}$ кг·м/с.

Пусть до экрана кинескопа электроны пролетают расстояние $L \approx 0{,}5$ м. Тогда размытие Δl пятна на экране, обусловленное волновыми свойствами электрона, составит (рис.2):

$$\Delta l \approx \frac{\Delta P_x}{P} L \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{sm}$$

Поскольку Δl << Δx, движение электронов в кинескопе телевизора можно рассматривать с помощью законов классической механики.

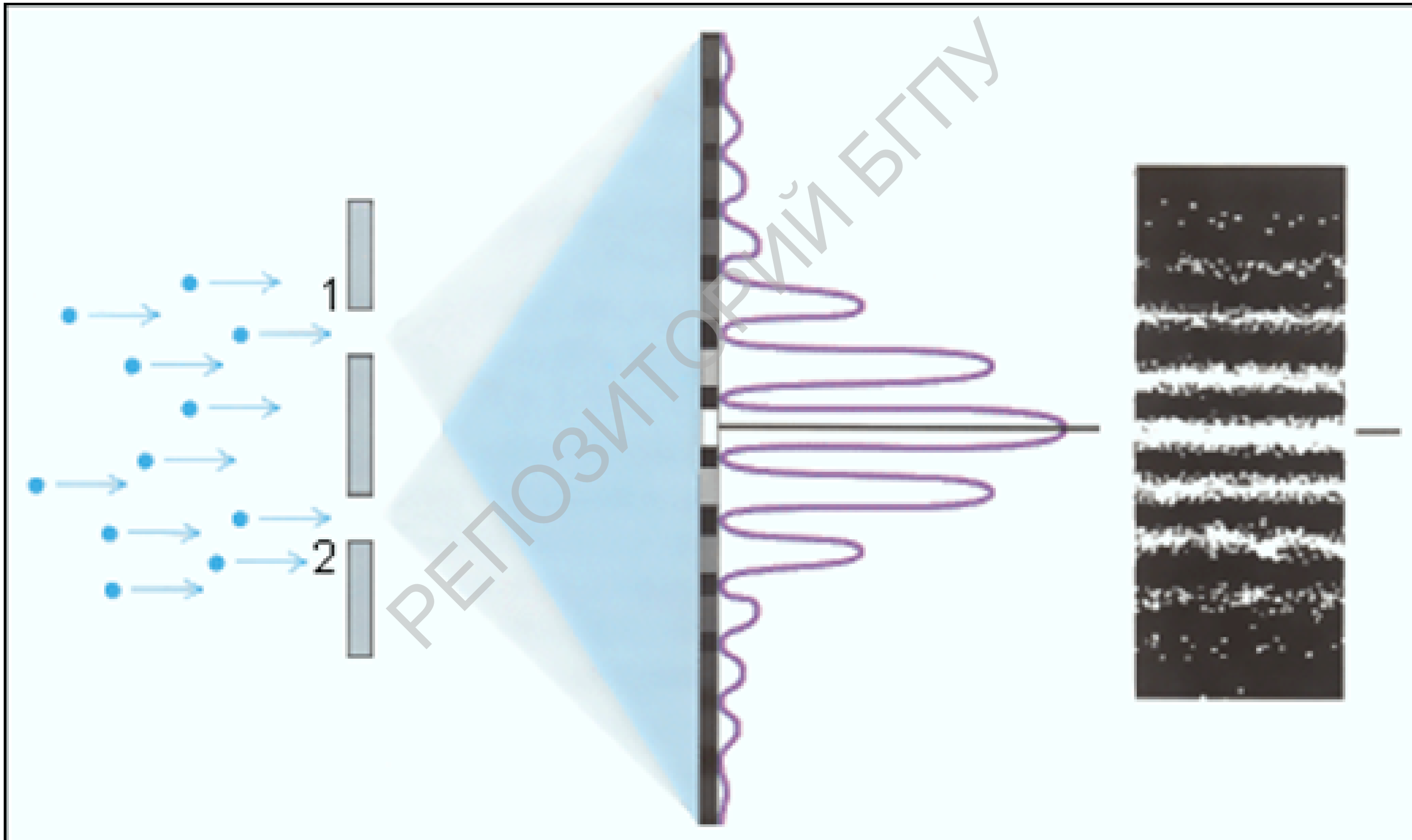


Рис. Дифракция электронов на двух щелях.

3. Хвалевая функцыя і яе фізічны сэнс.

$$\psi(x, y, z, t)$$

Физический смысл волновой функции сформулировал Борн в 1926 году. Согласно Борну: квадрат модуля волновой функции $|\Psi|^2$ определяет вероятность dP нахождения микрочастицы в пределах объема dV пространства:

$$dP = A|\Psi|^2 dV = A\Psi^*\Psi dV \qquad (1)$$

$$\int |\Psi|^2 dV = 1 \qquad (2)$$

Свойства волновой функции:

1. Ψ – функцию можно умножить на произвольное комплексное число C, тогда функции Ψ и $C\Psi$ определяют одно и тоже состояние квантовой частицы.

2. Волновая функция подчиняется принципу суперпозиции. Суть этого принципа заключается в следующем. Пусть волновая функция ψ_1 описывает одно состояние квантовомеханической системы (частицы), а функция ψ_2 – второе состояние. Тогда всегда существует состояние системы, описываемое функцией:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$$

где C_1 и C_2 произвольные комплексные числа.

Рассмотрим, например, совокупность собственных значений некоторой физической величины q_i и соответствующих им собственных функций ψ_i. В каждом состоянии величина q имеет определенное значение: в состоянии ψ_1 – значение q_1, в состоянии ψ_2 – значение q_2 и т.д. Согласно принципу суперпозиции возможное состояние описывается функцией:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$$

В этом состоянии величина q не будет иметь определенного значения. Она может принимать значения либо q_1, либо q_2. Вероятности получения этих значений равны квадратам модулей коэффициентов C - $|C_1|^2$ и $|C_2|^2$.

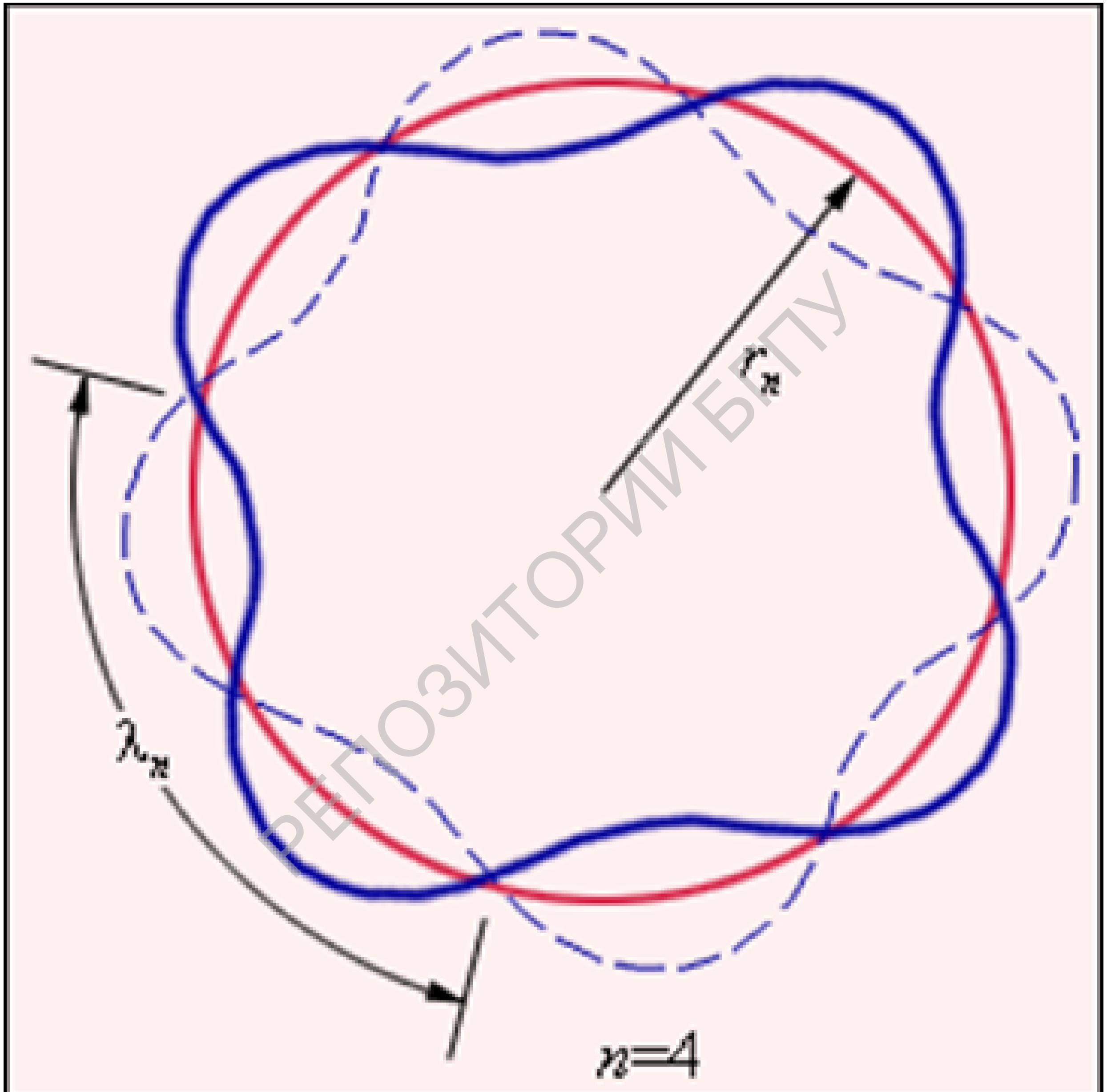
3. Согласно пункту 2 пси-функцию любого состояния можно разложить по собственным функциям, т.е. представить в виде:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n \qquad (3)$$

Для состояния, изменяющегося со временем, коэффициент C_n зависит от времени t. Квадраты модулей коэффициентов C_n дают вероятность того, что при измерениях, производимых над системой, находящейся в состоянии ψ, будут получены соответствующие значения некоторой величины q. Поскольку сумма всех таких вероятностей должна быть равна единице, коэффициенты C_n должны удовлетворять условию:

$$\sum_n |C_n|^2 = 1$$

Это условие всегда выполняется для нормированной волновой функции.



r_n
λ_n
$n=4$

4. Раўнанне Шродзінгера

Основное уравнение нерелятивистской ($v \ll c$) квантовой механики было получено Шредингером в 1926 году:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (4)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ – искомая волновая функция, $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Планка, i – мнимая единица, m – масса частицы, U – потенциальная энергия частицы в силовом поле, где частица движется, ∇^2 – оператор Лапласа, действие которого на волновую функцию представляет собой сумму вторых частных производных по координатам:

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

Уравнение (4) называется временным уравнением Шредингера.

Вид волновой функции Ψ, как следует из (4), определяется потенциальной энергией частицы U, т.е. характером тех сил, которые действуют на частицу. Потенциальная энергия частицы есть функция координат и времени, т.е. $U=U(x, y, z, t)$

Если U не зависит от времени, т.е. $U=U(x, y, z)$ (стационарное поле), то волновая функция Ψ может быть представлена в виде произведения:

$$\Psi(x,y,z,t)=\Psi(x,y,z)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \qquad (5)$$

В (5) волновая функция Ψ зависит только от координат $\Psi = \Psi(x, y, z)$, а второй сомножитель зависит только от времени t, E – полная энергия частицы, которая в случае стационарного поля остается постоянной (E = const).

Подставим (5) в (4):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t}+U\Psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t}=i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\Psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Сокращая на общий множитель, получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+U\Psi=i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\Psi \qquad (*)$$

Раскроем скобки:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+U\Psi=E\Psi$$

или

$$(U-E)\Psi-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi=0$$

Последнее уравнение обычно записывают в виде:

$$\nabla^2\Psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\Psi=0 \qquad (6)$$

(6) – уравнение Шредингера для стационарных состояний (стационарное уравнение Шредингера). Стационарные состояния – это такие состояния, в которых все наблюдаемые физические параметры не меняются с течением времени.

Калі разглядаць у (*) функцыю $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U$ як аператар, дзеянне якога на ψ-функцыю зводзіцца да памнажэння ψ на $\hat{H}$, то раўнанне (*) можа быць запісана ў выглядзе:

$\hat{H}\psi = E\psi$, дзе аператар $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$.

$\hat{H}$ называецца гамельтаніан, ён з'яўляецца уласным аператарам энергіі. Існуюць таксама аператары каардынат, імпульса, моманту імпульса і іншыя.

Уравнение Шредингера дополняется важными условиями, которые накладываются на волновую функцию:

1. Функция Ψ должна быть непрерывной, конечной и однозначной.

2. Производные Ψ – функции по координатам и времени должны быть непрерывны.

3. Функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема.

Квантовые числа n, l, m связаны определенными правилами квантования. Например, орбитальное квантовое число l может принимать целочисленные значения от 0 до $(n - 1)$. Магнитное квантовое число m может принимать любые целочисленные значения в интервале $\pm l$.

Таким образом, каждому значению главного квантового числа n, определяющему энергетическое состояние атома, соответствует целый ряд комбинаций квантовых чисел l и m. Каждой такой комбинации соответствует определенное распределение вероятности $|\Psi|^2$ обнаружения электрона в различных точках пространства.

Поэтому в квантовой физике электрон рассматривается не как «шарик», а как какое-то «электронное облако», плотность которого определяет вероятность нахождения электрона в том или ином месте объема атома.

Состояния, в которых орбитальное квантовое число $l = 0$, описываются сферически симметричными распределениями вероятности. Они называются *s*-состояниями (1*s*, 2*s*, ..., *ns*, ...). При значениях $l > 0$ сферическая симметрия электронного облака нарушается. Состояния с l=1 называются *p*-состояниями, с l=2 – *d*-состояниями и т. д.

На рисунке 1 изображены кривые распределения вероятности $\rho(r) = 4\pi r^2|\Psi|^2$ обнаружения электрона в атоме водорода на различных расстояниях от ядра в состояниях 1*s* и 2*s*.

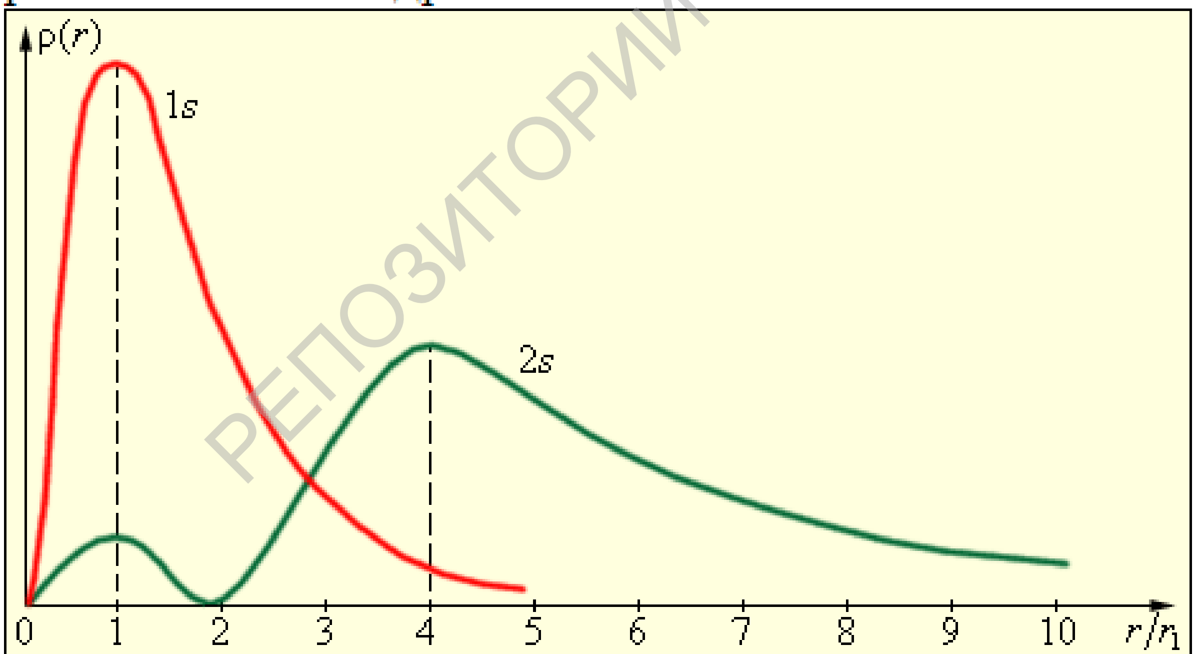
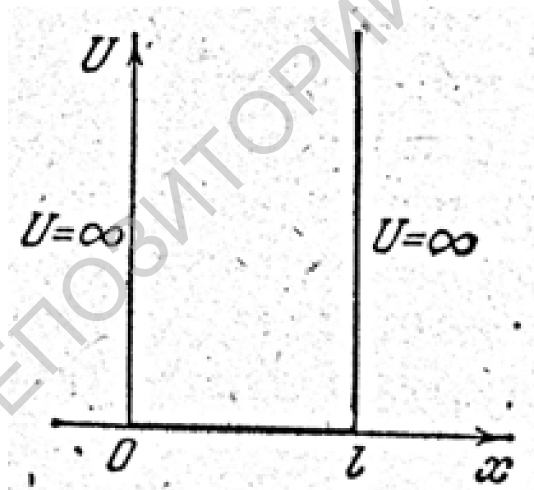


Рис.1. Распределение вероятности обнаружения электрона в атоме водорода в состояниях 1*s* и 2*s*. $r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м – радиус первой боровской орбиты.

Как видно из рисунка 1, электрон в состоянии 1*s* (основное состояние атома водорода) может быть обнаружен на различных расстояниях от ядра. С наибольшей вероятностью его можно обнаружить на расстоянии, равном радиусу r_1 первой боровской орбиты. Вероятность обнаружения электрона в состоянии 2*s* максимальна на расстоянии $r = 4r_1$ от ядра. В обоих случаях атом водорода можно представить в виде сферически симметричного электронного облака, в центре которого находится ядро.

5. Квантаванне энергіі часціцы ў патэнцыяльнай яме.

Знойдзем уласныя значэнні энергіі і адпаведныя ім уласныя функцыі для часціцы, якая знаходзіцца ў бясконца глыбокай, патэнцыяльнай яме. Няхай часціца рухаецца ўздоўж восі x, і рух яе абмежаваны непранікальнымі сценкамі $x=0$, $x=\ell$.



За межы ямы часціца папасць не можа, таму $\psi=0$. Пры $0 \leq x \leq \ell$ патэнцыяльная энергія $U=0$ і раўнанне Шродзнгера запішам у выглядзе:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$$

яма аднамерная $\Rightarrow$ $\nabla^2\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 x^2}$.

Такім чынам, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 x^2} + \dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$

Уводзім абазначэнне $K^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$ (1)

палучым дыф. раўнанне другога парадку добра вядомае з тэорыі ваганняў.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + K^2\psi = 0$$

Рашэнне мае выгляд: ψ(x)=asin(kx+α). Паколькі ψ-функцыя непарыўная, то на межах ямы яна таксама павінна быць роўна 0:

$$\psi(0)=\psi(\ell)=0$$

$$\psi(0)=a\sin\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$$

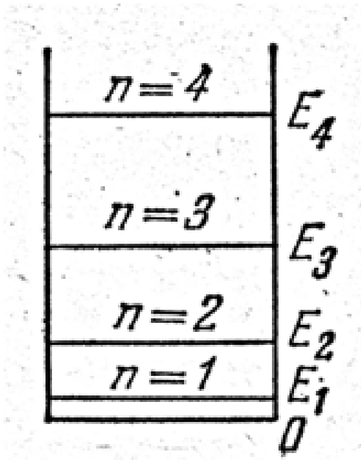
$$\psi(\ell)=a\sin k\ell=0 \Rightarrow k\ell=\pm n\pi \ (n=1, 2, 3\ldots)$$

n=0 адпадае, так як пры гэтым атрымліваецца, што імавернасць знаходжання часціцы ўсюду роўная 0, а гэты вынік пярэчыць умове зыходнай задачы.

$$k=\frac{n\pi}{\ell};\ k^2=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}=\frac{2m}{\hbar^2}E \Rightarrow E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2}n^2$$

Атрыманы выраз для ўласнай энергіі свабоднай часціцы, якая знаходзіцца ў аднамернай глыбокай патэнцыяльнай яме.

Такім чынам, значэнні энергіі могуць быць толькі дыскрэтнымі, г. зн. энергія часціцы ў яме квантуецца, таму што n=1, 2, 3… E_0 – не існуе; $E_1 \to n=1$; $E_2 \to n=2$. Адлегласці паміж узроўнымі не аднолькавыя.



Знойдзем уласныя функцыі:

$$\psi_n(x)=a\sin(kx+\alpha)=a\sin(n\pi x/\ell);\ \alpha=0$$

Згодна з умовай нарміроўкі:

$$\int_0^\ell |\Psi|^2 dV = 1 \qquad \int_0^\ell |\Psi_n(x)|^2 dx = a^2 \int_0^\ell \sin^2(n\pi x/\ell)dx = 1$$

Вядома, што

$$\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \sin^2(n\pi x/\ell)dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\ell \sin^2(n\pi x/\ell)dx = \frac{\ell}{2}$$

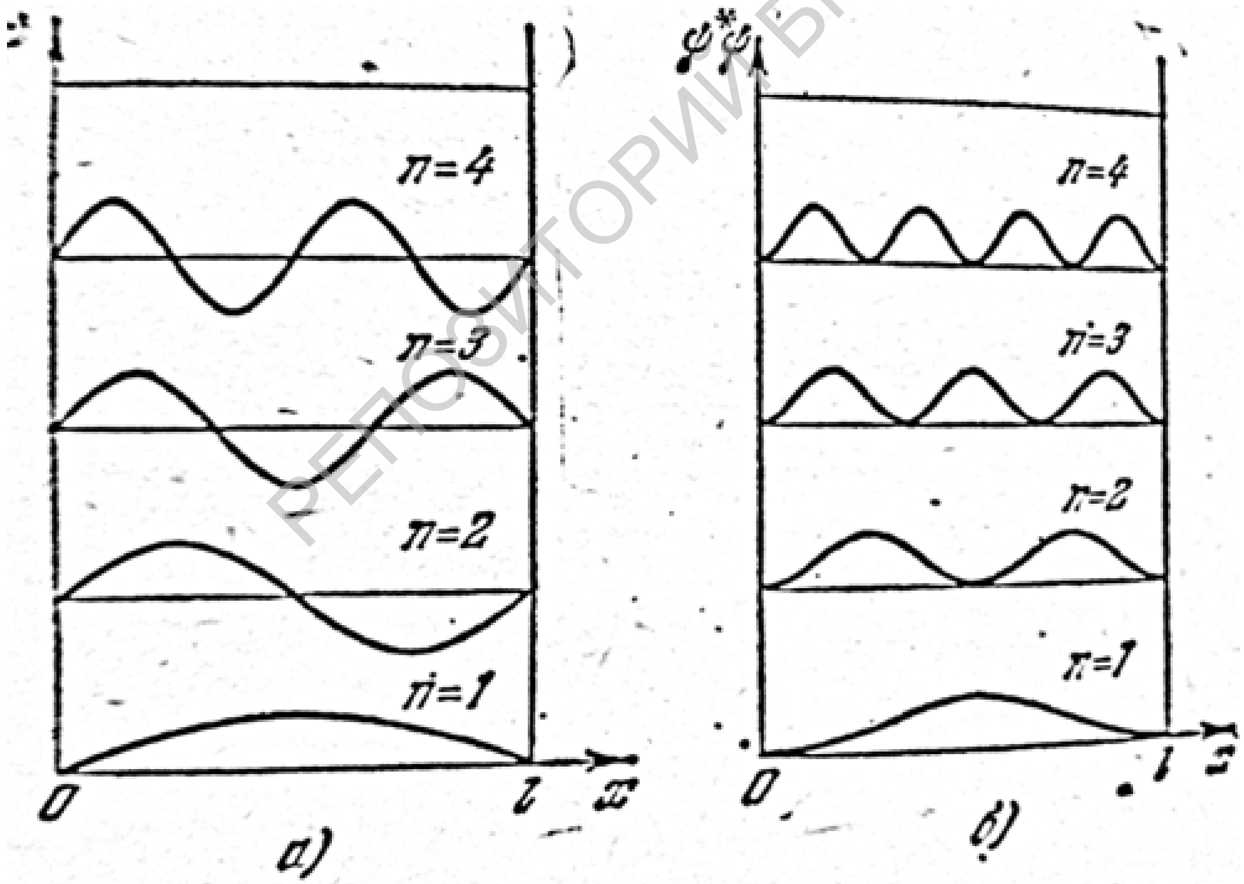
$$a^2\frac{\ell}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$$

Уласныя функцыі маюць выгляд:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad n=1, 2, 3\ldots$$

Імавернасць знаходжання часціцы пэўным пункце ямы будзе вызначацца квадратам функцыі $\psi_n(x)$:

$$\psi^2{}_n(x) = \frac{2}{\ell}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$



§6 Квантаванне энергіі лінейнага гарманічнага асцылятара

Часціцу, якая рухаецца ў адной плоскасці ў пэўным напрамку пад дзеяннем квазіпругкай сілы $F=-kx$, называюць лінейным гарманічным асцылятарам. Патэнцыяльная энергія такой часціцы:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

дзе $k=m\omega^2$ – квазіпругкій каэфіцыент; ω -- уласная частата гарманічнага асцылятара; m – маса часціцы.

$$U = \frac{m\upsilon^2 x^2}{2}$$

А раўнанне Шродзнгера для дадзенай квантавай часціцы:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x^2} + \frac{2m}{\hbar}\left(E - \frac{m\upsilon^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$$ - дыф. раўнанне другога парадку,

дзе E – поўная энергія асцыляратара.

Гэтаму раўнанню задавальняе рашэнне:

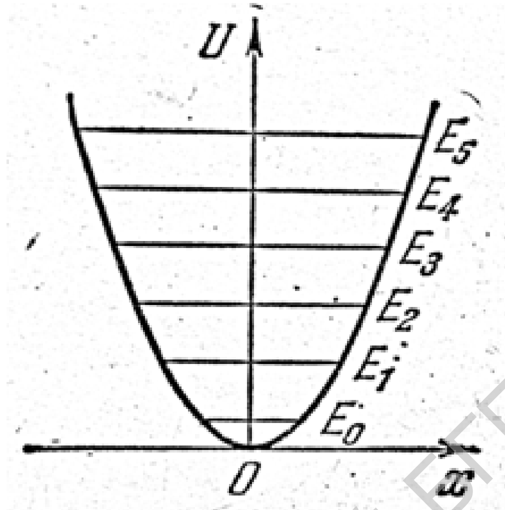
$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

дзе n=0, 1, 2… ω -- уласная частата.

Калі n=0, то $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ - энергія нулявых ваганняў.

Такім чынам, квантавая механіка паказвае, што пры паніжэнні тэмпературы $T \rightarrow 0$ K, матэрыя свайго руху не спыняе, рух толькі запавольваецца, а энергія часціц матэрыі не становіцца =0, а імкнецца да $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Гэта даказана даследваннямі па рассейванню святла на крышталях пры нізкіх тэмпературах.



$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega; \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega; \quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \ldots$$

На гарманічны асцыляратар накладваецца ўмова яго дзеяння, так званае правіла адбору, згодна якому $\Delta n = \pm 1$, гэта значыць, што пераходы часціцы паміж узроўнымі могуць ажыццяўляцца толькі паміж суседнімі.

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega$$

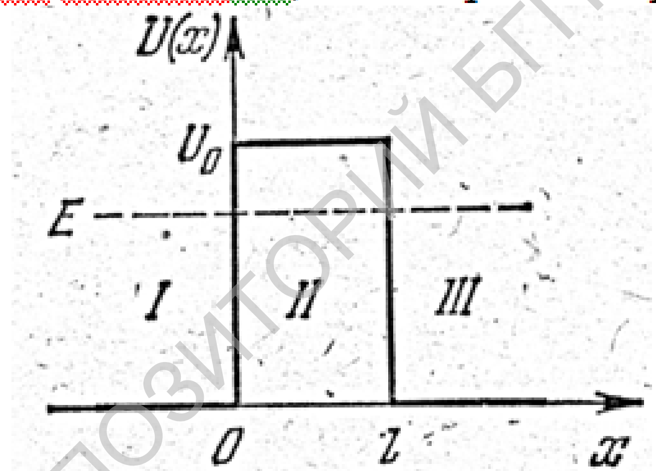
$$E_2 - E_1 = \hbar\omega$$

гэта значыць, што пры пераходзе часціцы з узроўня на узровень выпраменьваецца ці паглынаецца энергія ў выглядзе асобнага кванта $\hbar\omega$.

$$\varepsilon = \hbar\omega$$

§7 Праходжанне часціцы праз патэнцыяльны бар'ер (тунельны эфект)

Разглядзім нейкі аднамерны патэнцыяльны бар'ер вышынёй U_0. Адносна бар'ера ляціць часціца А; l – шырыня бар'ера.



Пытанне: як будзе рухацца часціца ў такіх абставінах?
Згодна класічным з'явам маем:

1. E – энергія часціцы, калі $E>U_0$, то яна пралятае над бар'ерам і толькі ў момант пралёту хуткасць памяншаецца, $E=E^{/}+U_0$, затым зноў з той жа хуткасцю.
2. $E<U_0$ часціца адбіваецца ад бар'ера. Праз бар'ер яна прайсці не зможа.

Квантавая фізіка гаворыць аб тым, што законы носяць імаверпасны характар.

1. $E>U_0$, то часціца не толькі праляціць над бар'ерам, але існуе імавернасць яе адбіцця ад бар'ера.
2. $E>U_0$, то часціца не толькі адбіваецца ад бар'ера, але існуе імавернасць таго, што яна праходзіць праз бар'ер у вобласць III.

Для таго, каб вызначыць характар руху мікрачасціцы ў розных абласцях, патрэбна рашыць раўнанне Шродзінгера для адпаведных абласцей.

В абласцях: I i III $\rightarrow$ $U=0$;

II $\rightarrow$ $U=U_0$.

Запішам раўнанне Шродзінгера:

(I, III) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \qquad (1)$$

(II) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi=0$$ (2)

Будзем шукаць рашэнне раўнання (1) у выглядзе:

$\psi=e^{\lambda x}$ $\psi=\psi(x)$

Падставім у (1) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{\lambda x}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}E\cdot e^{\lambda x}=0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+\frac{2m}{\hbar^2}E\cdot e^{\lambda x}=0$$

$$\lambda^2+\frac{2m}{\hbar^2}E=0$$ - характарыстычнае раўнанне

адкуль $\lambda=\pm i\alpha$, дзе $\alpha=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $\alpha=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$

Аналагічна, калі падставіць $\psi=e^{\lambda x}$ для II вобласці ў раўнанне (2), то атрымаем:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)} = \pm\beta$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)}$$

Такім чынам, хвалевыя функцыі для адпаведных абласцей запішуцца:

$$\psi_I(x) = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x}$$

$$\psi_{II}(x) = A_2 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x}$$

$$\psi_{III}(x) = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x}$$

Функцыі, якія уключаюць множнікі $e^{i\alpha x}$ і $e^{\beta x}$, характарызуюць распаўсюджванне хвалі ў дадатным напрамку восі, $e^{-i\alpha x}$ і $e^{-\beta x}$ – у адмоўным.

Каэфіцыенты:

A_1 – вызначае амплітуду хвалі, якая падае на бар'ер.

A_2 – якая ў бар'ры.

A_3 – якая выходзіць з бар'ера.

B_1, B_2, B_3 – амплітуды адбітых хваль.

B_1 – ад бар'ера; B_2 – унутры бар'ера; $B_3=0$.

Велічыня $R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$ - каэфіцыент праходжання праз патэнцыяльны бар'ер ці каэфіцыент празрыстасці.

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$ - каэфіціент праходжання праз патенцыяльны бар'ер, ці каэфіціент празрыстасці.

Разлікі паказваюць, што

$$D \approx e^{-2\beta\ell} = \left| \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)} \right| = e^{-\frac{2\ell}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}},$$

дзе ℓ - шырыня бар'ера.

Адсюль бачна, што з павялічэннем m часціцы, шырыні бар'ера ℓ каэфіцыент празрыстасці памяншаецца. Яго велічыня таксама залежыць ад $(U_0 - E)$, т.е. ад таго, насколькі $U_0 > E$.

Такім чынам, згодна законам квантавай механікі, якія носяць імавернасны характар, часціца, якая валодае энергіяй, меншай чым вышыня патэнцыяльнага бар'ера, можа пры апрэдзелённых умовах прасачыцца праз яго і імавернасць праходу залежыць ад m, U_0, E і ℓ.