2.8. Методыка рашэння задач па тэме «Элементы статыкі»

У статыцы разглядаюцца дзве асноўныя задачы:

1. Замена сістэмы сіл, нiто дзейнічаюць на фізічную сістэму (матэрыяльны пункт або абсалютна цвёрдае цела), больш простай сістэмай (раўнадзейнай і (або) парай сіл), эквівалентнай зыходнай.
2. Знаходжанне ўмоў раўнавагі фізічнай сістэмы пад дзеяннем зададзеных знешніх сіл.

У агульным выпадку фізічная сістэма знаходзіцца ў стане раўнавагі адносна інерцыяльнай сістэмы адліку пры адначасовым выкананні дзвюх умоў:

1. Геаметрычная сума ўсіх знешніх сіл, што дзейнічаюць на сістэму, роўна нулю, г. зн.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad (1).$$

2. Геаметрычная сума момантаў усіх сіл, што дзейнічаюць на сістэму, адносна адвольнага пункта O, роўна нулю, г. зн. $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{0}$ (2). У выпадку плоскай сістэмы сіл вектарнае ўраўненне (2) пераходзіць у скалярнае: $\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$.

Фактычна першае ўраўненне патрабуе , каб лінейнае паскарэнне фізічнай сістэмы пад дзеяннем зненіх сіл было роўна нулю, а другое — роўнасць нулю яе вуглавога паскарэння. Таму метады рашэння задач па статыцы тыя ж, што і метады рашэння задач па дынаміцы.

Пры рашэнні задач па гідрастатыцы неабходна дадаткова ўлічваць закон Паскаля, несціскальнасць вадкасцей (і газаў пры скорасцях руху, меншых чым 120 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$), выштурхвальную сілу, што дзейнічае на разглядаемую фізічную сістэму з боку вадкасці (або газу).

Рашэнне задач на рух цела ў вадкасці (газе) праводзіцца кінематыка-дынамічным метадам, а на рух вадкасцей (газаў) — з выкарыстаннем ураўнення непарыўнасці і ўраўнення Бернулі.

У адпаведнасці з асноўнымі этапамі рашэння задачы па фізіцы пры рашэнні задач па статыцы можна карыстацца наступным квазіалгарытмам.

1. Прааналізуйце фізічную сітуацыю, вылучыце яўна і няяўна зададзеныя аб'екты задачы.

2. Выберыце інерцыяльную сістэму адліку.

3. Выберыце фізічную сістэму і замяніце аб'екты,уключаныя ў яе, іх ідэальнымі мадэлямі (матэрыяльнымі пунктамі або абсалютна цвёрдымі целамі).

4. Вылучыце фізічныя законы, якія могуць быць выкарыстаны для апісання фізічнай сістэмы (абедзве ўмовы раўнавагі або толькі адну з іх).

5. Высветліце, з якімі матэрыяльнымі аб'ектамі ўзаемадзейнічае вылучаная фізічная сістэма, і замяніце гэтыя ўзаемадзеянні сіламі.

6. Запішыце ўмовы раўнавагі фізічнай сістэмы (або адну з іх).

7. Пакажыце на схематычным рысунку ўсе сілы, якія дзейнічаюць на фізічную сістэму; пункт, адносна якога зашсана ўраўненне момантаў, і плечы ўсіх сіл адносна гэтага пункта (калі пры рашэнні задачы выкарыстоўваецца другая ўмова раўнавагі).

8. Спраецыруйце вектарныя велічыні на восі Ox і Oy, раскрыйце ўраўненне момантаў і праверце, ці з'яўляецца атрыманая сістэма ўраўненняў поўнай (пры неабходнасці складзіце ўраўненні, якіх не хапае).

9. Рашыце атрыманую сістэму ўраўненняў адносна невядомых у агульным выглядзе.

10. Праверце правільнасць рашэння ў агульным выглядзе.

11. Выканайце разлікі.

12. Прааналізуйце вынікі.

Памятайце, што калі мадэллю фізічнай сітуацыі з'яўляецца матэрыяльны пункт або абсалютна цвёрдае цела, вярчэнне якога забаронена накладзенымі на яго сувязямі, то для рашэння задачы дастаткова толькі першай умовы раўнавагі. Калі мадэллю фізічнай сістэмы з'яўляецца абсалютна цвёрдае цела, вось вярчэння якога замацавана, то першая ўмова раўнавагі выконваецца аўтаматычна і для рашэння задачы дастаткова другой умовы. Пры ўзнікненні цяжкасцей у працэсе аналізу фізічнай сітуацыі і вынікаў рашэння задачы звяртайцеся да эўрыстычных арыенціраў, якія прыведзены ніжэй.

Эўрыстычныя арыенціры
(аналіз фізічнай сітуацыі і вынікаў рашэння)

I. Вылучыце сістэму цел, якія ўзаемадзейнічаюць паміж сабой.

II. Назавіце ўсе сілы, прыкладзеныя да цела, раўнавага якога разглядаецца:

1. Што разумеюць пад сілай узаемадзеяння?

2. Якія аб'екты ўзаемадзейнічаюць з целам, што разглядаецца ў дадзенай задачы?

3. Узаемадзеянне з якімі аб'ектамі можна не ўлічваць, чаму?

4. Ці можна ніткі (тросы, канаты) лічыць бязважкімі і нерасцяжнымі?

5. Якія сілы прыкладзены да разглядаемага цела?

III. Устанавіце наяўнасць вярчальных момантаў:

1. Пры якой умове цвёрдае цела будзе выконваць вярчальны рух адносна некаторай восі?

2. У якіх пунктах цела прыкладзены сілы; якія лініі дзеяння гэтых сіл?

3. Ці праходзяць лініі дзеяння сіл праз цэнтр мас цела?

4. Ці не забаронены вярчальны рух цела сувязямі?

5. Ці будзе вярцецца цела, калі будзе, то адносна якой восі?

IV. Вызначце плечы сіл, што дзейнічаюць на цела:

1. Што называецца плячом сілы?

2. Як праходзяць лініі дзеяння сіл, прыкладзеных да цела?

3. Як з выбранага пункта правесці нармалі да ліній дзеяння сіл?

4. Ці можна вызначыць плечы сіл адносна выбранага пункта?

V. Устанавіце месцазнаходжанне цэнтра мас цела (сістэмы цел):

1. Што называецца цэнтрам мас цела (сістэмы цел)?

2. Якія сілы дзейнічаюць на цела?

3. У якім стане будзе знаходзіцца цела, калі яго замацаваць у пункце, які з'яўляецца цэнтрам мас?

VI. Вызначце велічыню выштурхвальнай сілы:

1. Ад чаго залежыць модуль выштурхвальнай сілы, што дзейнічае на цела?

2. Чаму роўна, як накіравана і ў якім пункце цела прыкладзена выштурхвальная сіла?

3. Пры якіх суадносінах паміж сілай цяжару і выштурхвальнай сілай цела тоне, плавае ўнутры вадкасці, плавае на яе паверхні?

VII. Даследуйце вынікі:

1. Ці выканана правіла размернасцей?

2. Ці выканана другая ўмова раўнавагі ў адносінах да любога пункта цела?

3. Ці рэальныя вынікі?

4. Ці магчымы гранічны пераход да відавочнага выпадку?

<u>Прыклад 1.</u> Брусок масай $m = 1{,}5$ кг утрымліваецца ў раўнавазе на гладкай нахіленай плоскасці трыма сіламі $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$, адна з якіх накiравана вертыкальна ўверх, другая — уверх уздоўж нахіленай плоскасці, трэцяя — гарызантальна пад плоскасць. Вызначце сілу рэакцыі і вугал нахілу плоскасці да гарызонта, калі модуль кожнай з сіл роўны 5 Н.

Матэрыяльнымі аб'ектамі, якія маюць дачыненне да задачы, з'яўляюцца: лабараторыя, брусок, нахіленая плоскасць, гравітацыйнае поле Зямлі, паветра і аб'екты, узаемадзеянне з якімі апісваецца сіламі $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$.

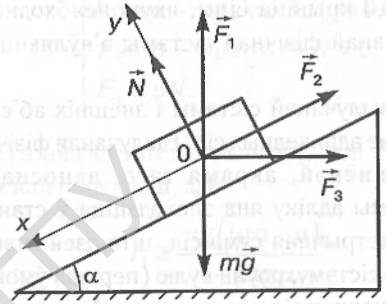
Сістэму адліку звяжам з лабараторыяй (фактычна з паверхняй Зямлі) і будзем лічыць яе інерцыяльнай. Пачатак каардынат выберам у пункце, які супадае з цэнтрам мас бруска. Вось Ox накіруем уніз уздоўж нахіленай плоскасці, вось Oy — перпендыкулярна да яе.

У якасці фізічнай сістэмы разгледзім брусок. Дапусцім, што яго можна прыняць за матэрыяльны пункт. Вылучаная фізічная сістэма з'яўляецца незамкнёнай. Яе ўзаемадзеянні са знешнімі аб'ектамі можна апісаць пры дапамозе адпаведных сіл. Паколькі вылучаная фізічная сістэма адносна выбранай інерцыяльнай сістэмы адліку знаходзіцца ў раўнавазе, то геаметрычная сума сіл, што дзейнічаюць на гэту сістэму, роўна нулю.

Калі не ўлічваць узаемадзеянне бруска з паветрам (сіла трэння спакою паміж целам і нахіленай плоскасцю адсутнічае па ўмове задачы), то на брусок дзейнічае сіла цяжару $m\vec{g}$, абумоўленая яго ўзаемадзеяннем з гравітацыйным полем Зямлі і накіраваная вертыкальна ўніз, сіла нармальнай рэакцыі нахіленай плоскасці $\vec{N}$, накіраваная перпендыкулярна да плоскасці, і зададзеныя ва ўмове задачы сілы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$ (рыс. 29).

У адпаведнасці з першай умовай раўнавагі

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$



Рыс. 29

Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на восі каардынат, атрымаем

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_2 - F_1\sin\alpha - F_3\cos\alpha = 0, \\ -mg\cos\alpha + N + F_1\cos\alpha - F_3\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

З улікам таго што $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{1}{3}mg$, атрымаем канчаткова:

$$\begin{cases} mg(1 - 2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0, \\ 3N - 2mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Рашэнне гэтай сістэмы адносна α і N дае: $\alpha = 53°$, $N = 10$ Н. Правільнасць рашэння можна праверыць, калі выбраць іншую сістэму каардынат (напрыклад, вось Ox накіраваць гарызантальна, а вось Oy — вертыкальна).

<u>Прыклад 2.</u> Брусок масай $m = 1$ кг знаходзіцца на нахіленай плоскасці з вуглом нахілу $\alpha = 30°$. Якую мінімальную гарызантальную сілу трэба прыкласці да бруска, каб ён заставаўся ў спакоі, калі каэфіцыент трэння паміж ім і плоскасцю $\mu = 0{,}2$?

Матэрыяльнымі аб'ектамі, якія маюць дачыненне да сітуацыі, аб якой ідзе гаворка ў задачы, з'яўляюцца: лабараторыя, брусок, нахіленая плоскасць, гравітацыйнае поле Зямлі і паветра.

Сістэму адліку звяжам з лабараторыяй (фактычна з паверхняй Зямлі) і будзем лічыць яе інерцыяльнай. Пачатак каардынат выберам у пункце, які супадае з цэнтрам мас бруска, вось Ox накіруем гарызантальна, а вось Oy — вертыкальна ўверх.

У якасці фізічнай сістэмы разгледзім брусок. Дапусцім, што яго можна прыняць за матэрыяльны пункт. Зямля, нахіленая плоскасць, паветра і крыніца сілы, якую неабходна знайсці, у адносінах да вылучанай фізічнай сістэмы з'яўляюцца знешнімі аб'ектамі.

Узаемадзеянні вылучанай сістэмы і знешніх аб'ектаў можна апісаць пры дапамозе адпаведных сіл. Вылучаная фізічная сістэма з'яўляецца незамкнёнай, акрамя таго, адносна выбранай інерцыяльнай сістэмы адліку яна знаходзіцца ў стане раўнавагі (спакою). Таму геаметрычная сума сіл, што дзейнічаюць на разглядаемую фізічную сістэму, роўна нулю (першая ўмова раўнавагі цела пад дзеяннем знешніх сіл у інерцыяльнай сістэме адліку).

У адпаведнасці з вынікамі аналізу фізічнай сітуацыі, калі не ўлічваць узаемадзеянне бруска з паветрам, то на яго дзейшчаюць: сіла цяжару $m\vec{g}$, накіраваная вертыкальна ўніз; сіла рэакцыі нахіленай плоскасці $\vec{N}$, накіраваная перпендыкулярна да плоскасці; сіла трэння спакою $\vec{F}_{тр}$, накіраваная ўздоўж нахіленай плоскасці, і сіла $\vec{F}$, якую неабходна знайсці, накіраваная гарызантальна (рыс. 30).

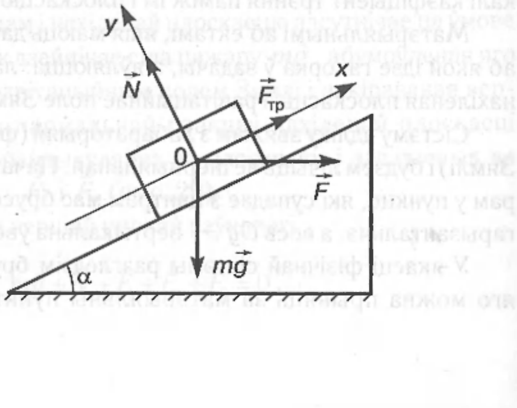
Паколькі брусок знаходзіцца ў стане раўнавагі, то

$$m\vec{g}+\vec{F}_{тр}+\vec{N}+\vec{F}=\vec{0}\,.$$

Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на восі Ox і Oy з улікам двух магчымых напрамкаў сілы трэння спакою (уверх або ўніз уздоўж нахіленай плоскасці), атрымаем

$$\begin{cases} F\cos\alpha - mg\sin\alpha \pm F_{тр} = 0, \\ N - F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Паколькі брусок не рухаецца па нахіленай плоскасці, то $F_{тр} < \mu N$. Такім чынам,



Рыс. 30

$$\begin{cases} F\cos\alpha - mg\sin\alpha \pm F_{тр} = 0, \\ F\sin\alpha + mg\cos\alpha - N = 0, \\ F_{тр} \le \mu N. \end{cases}$$

Рашэнне гэтай сістэмы для выпадку, калі $F_{тр}$ накіравана ўверх уздоўж нахіленай плоскасці, дае

$$F_1 > \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Калі $F_{тр}$ накіравана ўніз уздоўж нахіленай плоскасці, то

$$F_2 \ge \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Мінімальное значэнне сілы ў першым выпадку $F_{1\min} = \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}$, у другім — $F_{2\min} = \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}$. З атрыманых выразаў для $F_{1\min}$ і $F_{2\min}$ відаць, што $F_{1\min} < F_{2\min}$.

Такім чынам, мінімальнае значэнне гарызантальнай сілы, якую неабходна прыкласці да бруска для таго, каб ён заставаўся ў стане спакою, роўна

$$F_{\min} = \frac{mg(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Правільнасць рашэння задачы можна праверыць, выбраўшы іншы напрамак восей Ox і Oy.

Разлікі даюць: $F = 3{,}3$ Н.

<u>Прыклад 3.</u> Да гладкай вертыкальнай сцяны на нітцы даўжынёй $l = 4$ см падвешаны аднародны шар масай $m = 300$ г і радыусам $R = 2{,}5$ см. Вызначце сілу нацяжэння ніткі і сілу ціску шара на сцяну.

Аб'ектная вобласць задачы ўключае: лабараторыю, шар, сцяну, нітку, гравітацыйнае поле Зямлі і паветра.

Сістэму адліку звяжам з лабараторыяй і будзем лічыць яе інерцыяльнай. Пачатак каардынат выберам у цэнтры шара. Вось Ox накіруем гарызантальна, вось Oy — вертыкальна ўверх.

У якасці фізічнай сістэмы разгледзім шар. Будзем лічыць яго абсалютна цвёрдым аднародным целам. Вылучаная фізічная сістэма з'яўляецца незамкнёнай, таму што ўзаемадзейнічае з матэрыяльнымі аб'ектамі, не ўключанымі ў яе.

Паколькі вылучаная сістэма знаходзіцца ў стане раўнавагі (спакою) адносна выбранай інерцыяльнай сістэмы адліку, то знешнія сілы, што дзейнічаюць на яе, задавальняюць як першую, так і другую умовы раўнавагі абсалютна цвёрдага цела.

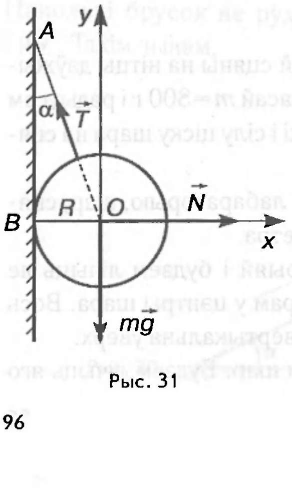
Калі не ўлічваць выштурхвальную сілу з боку паветра, то на шар дзейнічаюць сіла цяжару $m\vec{g}$, прыкладзеная ў яго цэнтры і накіраваная вертыкальна ўніз; сіла нармальнай рэакцыі сцяны $\vec{N}$, накіраваная гарызантальна так, што лінія яе дзеяння праходзіць праз цэнтр шара; сіла пругкасці ніткі $\vec{T}$, лінія дзеяння якой невядомая.

Паколькі шар знаходзіцца у стане раўнавагі, сума момантаў сіл, што дзейнічаюць на яго, роўна нулю адносна любога пункта шара, у тым ліку і адносна яго цэнтра O, г. зн. $\vec{M}_0(m\vec{g})+\vec{M}_0(\vec{N})+\vec{M}_0(\vec{T})=\vec{0}$, адкуль вынікае, што лінія дзеяння сілы пругкасці праходзіць праз цэнтр шара.

Па першай умове раўнавагі $\vec{T}+m\vec{g}+\vec{N}=\vec{0}$ (рыс. 31). Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на восі Ox і Oy, атрымаем

$$\begin{cases} N - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Адкуль $T=\dfrac{mg}{\cos\alpha}$; $N = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



Рыс. 31

З рысунка відаць, што

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{R}{\sqrt{l(2R+l)}};\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{l(2R+l)}}{R+l},$$

дзе l — даўжыня ніткі, R — радыус шара. Акрамя таго, паводле трэцяга закону Ньютана рэакцыя сцяны роўна сіле ціску на сцяну. Такім чынам:

$$T=\frac{mg(R+l)}{\sqrt{l(2R+l)}};\quad F=\frac{mgR}{\sqrt{l(2R+l)}}.$$

Калі зрабіць разлікі, атрымаем $T = 3{,}19$ Н, $F = 1{,}23$ Н.

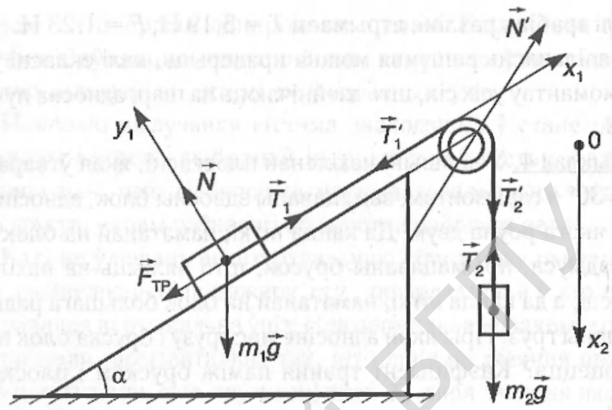
Правільнасць рашэння можна праверыць, калі скласці ўраўненне момантаў усіх сіл, што дзейнічаюць на шар, адносна пунктаў A або B.

<u>Прыклад 4.</u> У вяршыні нахіленай плоскасці, якая ўтварае вугал $\alpha = 30°$ з гарызонтам, замацаваны здвоены блок, адносіна радыусаў якога роўна двум. Да канца ніткі, наматанай на блок меншага радыуса, прымацаваны брусок, што ляжыць на нахіленай плоскасці, а да канца ніткі, наматанай на блок большага радыуса, падвешаны груз. Пры якой адносіне мас грузу і бруска блок не будзе вярцецца? Каэфіцыент трэння паміж бруском і плоскасцю $\mu = 0{,}3$.

Аб'ектная вобласць задачы ўключае: брусок, нахіленую плоскасць, здвоены блок, Зямлю і паветра.

Сістэму адліку звяжам з лабараторыяй (фактычна з паверхняй Зямлі) і будзем лічыць яе інерцыяльнай. У якасці фізічных сістэм будзем па чарзе разглядаць брусок, груз і блок. Плоскасць і блок будзем лічыць абсалютна цвердымі целамі, брусок і груз — матэрыяльнымі пунктамі, ніткі — бязважкімі і нерасцяжнымі, гравітацыйнае поле Зямлі —аднародным. Вылучаныя фізічныя сістэмы з'яўляюцца незамкнёнымі ў выніку наяўнасці ўзаемадзеянняў з матэрыяльнымі аб'ектамі, што знаходзяцца па-за імі. Гэтыя ўзаемадзеянні могуць быць апісаны пры дапамозе адпаведных сіл. Акрамя таго, кожная з вылучаных сістэм знаходзіцца ў стане раўнавагі (спакою) адносна выбранай інерцыяльнай сістэмы адліку. Таму сілы, што дзейнічаюць на кожную з іх, павінны задавальняць умовы раўнавагі.

Калі не ўлічваць выштурхвальную сілу з боку паветра і сілу трэння на восі блока, то на брусок і груз дзейнічаюць сілы цяжару $m_1\vec{g}$ і $m_2\vec{g}$ і сілы пругкасці нітак $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, абумоўленыя іх узаемадзеяннем з гравітацыйным полем Зямлі і ніткамі. Акрамя таго, на брусок дзейнічае сіла трэння спакою $\vec{F}_{тр}$, накіраваная ўздоўж нахіленай плоскасці або ўніз, або ўверх, і сіла рэакцыі апоры $\vec{N}$, накіраваная перпендыкулярна да нахіленай плоскасці. На блок дзейнічаюць сілы пругкасці нітак $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$, а таксама сіла рэакцыі восі $\vec{N}'$ (рыс. 32).



Рыс.32

Умовы раўнавагі вылучаных фізічных сістэм маюць выгляд:

$$\begin{cases} m\vec{g}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = \vec{0}, \\ m_2 g + \vec{T}_2 = \vec{0}, \\ \vec{M}_0\left(\vec{T}_1'\right) + \vec{M}_0\left(\vec{T}_2'\right) + \vec{M}_0\left(\vec{N}'\right) = \vec{0}. \end{cases}$$

Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на восі каардынат з улікам двух магчымых напрамкаў сілы трэння спакою: уніз уздоўж нахіленай плоскасці (праекцыя на вось Ox_1 — адмоўная) і ўверх уздоўж нахіленай плоскасці (праекцыя на вось Ox_1 — дадатная) і, акрамя таго, раскрыць ураўненне момантаў, атрымаем

$$\begin{cases} T_1 \pm F_{тр} - m_1 g \sin\alpha = 0, \\ N - m_1 g \cos\alpha = 0, \\ m_2 g - T_2 = 0, \\ T_1' r = T_2' R. \end{cases}$$

Паколькі брусок знаходзіцца ў стане спакою, то $F_{тр} \le \mu N$; акрамя таго, паколькі ніткі бязважкія і нерасцяжныя, то $T_1 = T_1'$ і $T_2 = T_2'$. Па ўмове задачы $R = 2r$. З улікам гэтага атрымаем наступную сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} T_1 \pm F_{\text{тр}} - m_1 g \sin\alpha = 0, \\ N - m_1 g \cos\alpha = 0, \\ m_2 g - T_2 = 0, \\ F_{\text{тр}} \leq \mu N, \\ T_1 = 2T_2. \end{cases}$$

Рашэнне гэтай сістэмы дае для адносіны мас наступны выраз:

$$\frac{1}{2}(\text{tg}\alpha - \mu) \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \frac{1}{2}(\text{tg}\alpha + \mu).$$

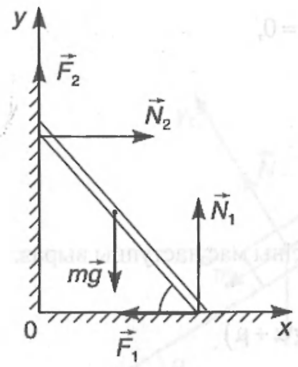
Прычым калі $\frac{m_2}{m_1} < \frac{\text{tg}\alpha - \mu}{2}$, то брусок будзе слізгаць па нахіленай плоскасці ўніз, а калі $\frac{m_2}{m_1} > \frac{tg\alpha + \mu}{2}$, то брусок будзе слізгаць па нахіленай плоскасці ўверх.

Разлікі даюць: $0{,}14 \leq \frac{m_2}{m_1} \leq 0{,}44$.

Прыклад 5. Пры якім найменшым вугле нахілу да гарызонта драбіны, прыстауленыя да сцяны, будуць знаходзіцца ў раўнавазе, калі каэфіцыент трэння паміж драбінамі і падлогай роўны μ_1, а паміж драбінамі і сценкай — μ_2 ?

Аналіз фізічнай сітуацыі, апісанай у задачы, паказвае, што калі ў якасці фізічнай сістэмы выбраць драбіны і лічыць іх абсалютна цвёрдым аднародным целам, якое знаходзіцца ў стане спакою ў інерцыяльнай сістэме адліку, звязанай з паверхняй Зямлі, то геаметрычная сума сіл, што дзейнічаюць на драбіны, і алгебраічная сума момантаў гэтых сіл адносна любога пункта, які ляжыць у плоскасці дзеяння сіл, павінны быць роўнымі нулю.

Калі не ўлічваць выштурхвальную сілу з боку паветра, то на драбіны дзейнічае сіла цяжару $m\vec{g}$, прыкладзеная ў іх цэнтры і накіраваная вертыкальна ўніз, сіла нармальнай рэакцыі падлогі N_1, накіраваная вертыкальна ўверх, сіла нармальнай рэакцыі сцяны N_2, накіраваная гарызантальна, сіла трэння спакою паміж драбінамі і падлогай $\vec{F_1}$ і сіла трэння спакою паміж драбінамі і сцяной $\vec{F_2}$ (рыс. 33).



Рыс. 33

Па першай умове раўнавагі

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на восі Ox і Oy, атрымаем

$$\begin{cases} N_2 - F_1 = 0, \\ N_1 + F_2 - mg = 0, \end{cases}$$

г. зн. $F_1 = N_2$, $F_2 = mg - N_1$. З улікам таго, што $F_1 < \mu_1 N_1$ і $F_2 < \mu_2 N_2$, атрымаем $N_2 < \mu_1 N_1$, $mg < (\mu_1\mu_2 + 1)N_1$.

Паколькі ў дзвюх апошніх няроўнасцях змяшчаюцца тры невядомыя велічыні, складзём ураўненне момантаў адносна пункта судакранання драбін з падлогай:

$$\vec{M}_A(m\vec{g}) + \vec{M}_A(\vec{N}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{N}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{0}$$

або ў яўным выглядзе

$$\frac{1}{2} mg\ell\cos\alpha - N_2\ell\sin\alpha - F_2\ell\cos\alpha = 0,$$

дзе ℓ — даўжыня драбін, α — вугал нахілу драбін да гарызонта. Калі падставіць у апошнюю формулу значэнне $F_2 = mg - N_1$, атрымаем

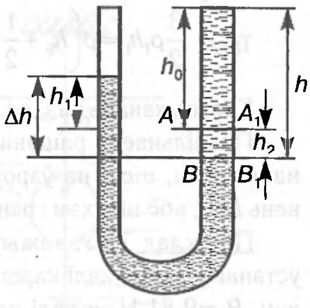
$$(2N_1 - mg)\cos\alpha = 2N_2\sin\alpha, \text{ адкуль } \operatorname{tg}\alpha = \frac{2N_1 - mg}{2N_2}.$$

З улікам няроўнасцей для N_1 і N_2 атрымаем $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1}$, адкуль

$$\operatorname{tg}\alpha_{\min} = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1} \text{ або } \alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_1}\right).$$

Прыклад 6. У сазлучаныя пасудзіны, плошчы сячэнняў якіх адносяцца як 1 : 2, налітая ртуць так, што даверху пасудзін застаецца 10 см. На колькі падымецца ўзровень ртуці ў вузкай пасудзіне, калі шырокую пасудзіну напоўніць даверху вадой?

Да матэрыяльных аб'ектаў задачы адносяцца: лабараторыя, ртуць, вада, паветра, гравітацыйнае поле Зямлі, сазлучаныя пасудзіны.



Рыс. 34

Інерцыяльную сістэму адліку звяжам з паверхняй Зямлі. Будзем лічыць, што ў адносінах да выбранай сістэмы адліку пасудзіны знаходзяцца ў стане спакою.

У якасці фізічнай сістэмы разгледзім вадкасці, якія знаходзяцца ў сазлучаных пасудзінах. Дапусцім, што вадкасці можна лічыць ідэальнымі. Паколькі вылучаная фізічная сістэма з'яўляецца незамкнёнай, то яе ўзаемадзеянні са знешнімі аб'ектамі можна апісаць пры дапамозе адпаведных сіл.

Вадкасць у сазлучаных пасудзінах знаходзіцца ў стане раўнавагі. З першай умовы раўнавагі з улікам закону Паскаля вынікае, што ў гэтым выпадку гідрастатычны ціск у шырокай і вузкай пасудзінах на адным гарызантальным узроўні павінен быць аднолькавы. Гэта можна даказаць, калі, напрыклад, разглядзець сілы, што дзейнічаюць на мяжу падзелу вада — ртуць, якая знаходзіцца ў стане раўнавагі.

Няхай AA_1 — пачатковы ўзровень ртуці ў пасудзінах, h_1 — шуканая вышыня падняцця ртуці ў вузкай пасудзіне, h_2 — паніжэнне ўзроўню ртуці ў шырокай пасудзіне, $h_0 = 10$ см — вышыня слупка вады, p_0 — знешні ціск, ρ_1 — шчыльнасць ртуці, ρ — шчыльнасць вады (рыс. 34).

Калі не ўлічваць сілы паверхневага нацяжэння, то ціскі ў вузкай і шырокай пасудзінах на ўзроўні BB_1 роўны адпаведна $p_1 = p_0 + \rho_1 g(h_1 + h_2)$, $p_2 = p_0 + \rho g h$.

Паколькі $p_1 = p_2$, то $\rho_1(h_1 + h_2) = \rho h$.

З улікам несціскальнасці вадкасцей

$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \text{, г. зн. } h_2 = \frac{S_1 h_1}{S_2} = \frac{h_1}{2}.$$

Акрамя таго, $h = h_0 + h_2$, г. зн. $h = h_0 + \frac{1}{2} h_1$.

Таму $\frac{3}{2}\rho_1 h_1 = \rho\left(h_0 + \frac{1}{2}h_1\right)$, адкуль $h_1 = \frac{2\rho h_0}{3\rho_1 - \rho}$.

Калі выканаць разлікі, атрымаем $h_1 = 5$ мм.

Правільнасць рашэння можна праверыць, калі разглядзець, напрыклад, ціскі на ўзроўні CC_1, размешчаным ніжэй за ўзровень BB_1, або шляхам гранічнага пераходу пры $h_0 \to 0$.

Прыклад 7. Узважыўшы карону цара Геярона, Архімед устанавіў, што , калі карона знаходзіцца ў паветры, вагі паказваюць $P_1 = 9{,}81$ Н, а калі яе апусціць у ваду, то вагі паказваюць $P_2 = 9{,}22$ Н (у адпаведных адзінках СІ). Як ён змог вызначыць, што карона выраблена не з чыстага золата?

Матэрыяльнымі аб'ектамі, якія маюць дачыненне да задачы, з'яўляюцца: карона, Зямля, вада, паветра, нітка.

Сістэму адліку звяжам з паверхняй Зямлі і будзем лічыць яе інерцыяльнай. Вось Ox накіруем вертыкальна ўверх.

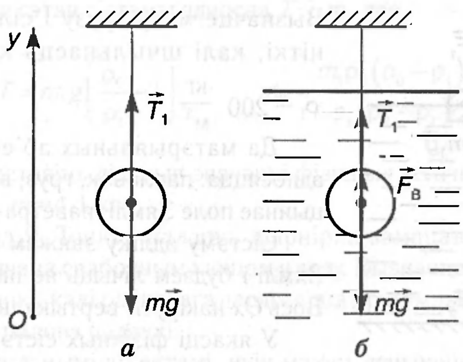
У якасці фізічнай сістэмы разгледзім карону. Дапусцім, што яе можна прыняць за матэрыяльны пункт. Вылучаная фізічная сістэма з'яўляецца незамкнёнай. Яе ўзаемадзеянні са знешнімі целамі могуць быць апісаны пры дапамозе адпаведных сіл. Паколькі ў абодвух выпадках вылучаная фізічная сістэма знаходзіцца ў стане раўнавагі адносна выбранай інерцыяльнай сістэмы адліку, то геаметрычная сума сіл, што дзейнічаюць на яе, роўна нулю.

Вагой цела называецца сіла, з якой цела пад дзеяннем сілы цяжару ціснe на гарызантальную апору або расцягвае нітку падвеса. Такім чынам, у выпадку цела, якое падвешана на нітцы і знаходзіцца у стане раўнавагі, вага гэтага цела P лікава роўна сіле пругкасці ніткі T.

У паветры на карону дзейнічаюць сіла цяжару $m\vec{g}$ і сіла пругкасці ніткі $\vec{T}_1$ (выштурхвальную сілу з боку паветра не ўлічваем); у вадзе — сіла цяжару $m\vec{g}$, сіла пругкасці ніткі $\vec{T}_2$ і выштурхвальная сіла $\vec{F}_B$ (рыс. 35).

Па першай умове раўнавагі цела ў інерцыяльнай сістэме адліку

$$\begin{cases} \vec{T}_1 + m\vec{g} = \vec{0}, \\ \vec{T}_2 + \vec{F}_B + m\vec{g} = \vec{0}. \end{cases}$$



Рыс. 35

Калі спраецыраваць вектарныя велічыні на вось Ox, атрымаем

$$\begin{cases} T_1 - mg - 0, \\ T_2 + F_в - mg = 0. \end{cases}$$

З улікам таго, што $P_1 = T_1$, $P_2 = T_2$, $F_в = \rho g V$, атрымаем канчаткова:

$$\begin{cases} P_1 - \rho g V = 0, \\ P_2 + \rho_0 g V - \rho g V = 0, \end{cases}$$

дзе ρ_0 — шчыльнасць вады, ρ — шчыльнасць рэчыва, з якога зроблена карона, V — яе аб'ём.

Рашэнне гэтай сістэмы ўраўненняў адносна ρ дае:

$$\rho = \frac{P_1 \rho_0}{P_1 - P_2}.$$

Калі зрабіць разлікі, атрымаем $\rho = 16{,}6\ \frac{г}{см^3}$. Паколькі шчыльнасць рэчыва кароны меншая за шчыльнасць чыстага золата, якая роўна $19{,}6\ \frac{г}{см^3}$, то карона змяшчае дабаўку больш лёгкага металу.

Прыклад 8. Да коркавага паплаўка масай $m_1 = 1$ кг прывязаны на нітцы свінцовы груз так, што паплавок цалкам апушчаны ў ваду.