Раздел 1

МЕХАНИКА

Механика — это раздел физики, в котором изучается механическое движение макроскопических тел. Исследование движения тел в механике осуществляется либо на основании законов Ньютона, либо на основании законов сохранения (или изменения) импульса, момента импульса и механической энергии. Использование этих законов дает возможность решить основную задачу механики, т. е. определить положение тела в произвольный момент времени, если известны его положение и скорость в начальный момент времени, а также масса тела и силы, действующие на него.

Глава 1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

1.1. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Простейшим видом движения в природе является *механическое движение*. Оно заключается в изменении взаимного положения тел или частей одного тела в пространстве с течением времени. Раздел механики, в котором изучается механическое движение тел без учета взаимодействий между ними, т. е. без выявления причин, которые вызывают и изменяют состояние движения, называют *кинематикой*.

Поскольку свободное пространство является *однородным* и *изотропным* (т. е. все точки и все направления в нем равноценны) и, кроме того, время также является однородным (т. е. любые явления, которые происходят в одинаковых условиях в разные моменты времени, подчиняются одним и тем же законам), то положение тела относительно свободного пространства зафиксировать невозможно. Его можно определить только относительно какого-нибудь другого тела.

Таким образом, механическое движение тела является *относительным*, поскольку оно всегда происходит как движение относительно другого тела, которое условно считается неподвижным.

Тело (группа тел), относительно которого рассматривается механическое движение данного тела, называется *телом отсчета*. Положение движущегося тела в произвольный момент времени обычно задается в системе координат, начало которой связано с фиксированной точкой тела отсчета (ее называют *точкой отсчета*), в виде зависимости его координат или радиуса-вектора от времени. Напомним, что радиусом-вектором называется вектор, соединяющий начало координат с движущимся телом.

Тело отсчета, жестко связанная с ним система координат и способ измерения времени (начало отсчета времени и его единица) образуют *систему отсчета*.

Выбор системы отсчета в кинематике обусловлен исключительно соображениями удобства при математическом описании движения. Преимущества определенного класса систем отсчета — *инерциальных систем отсчета* — выявляются только в динамике, причем существование инерциальных систем отсчета в динамике постулируется первым законом Ньютона.

Любая система отсчета, связанная с телом отсчета, которое находится в покое или движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, также является *инерциальной*. Для практических расчетов с достаточной степенью точности инерциальной можно считать систему отсчета, связанную с Землей (геоцентрическую) или с Солнцем (гелиоцентрическую). Однако следует иметь в виду, что строго инерциальных систем отсчета не существует. Поэтому инерциальная система отсчета является идеальной физической моделью реальной системы отсчета. Систему отсчета, связанную с телом отсчета, которое движется относительно инерциальной системы отсчета с ускорением, называют *неинерциальной*.

Движение тела можно считать определенным, если известно, как движется каждая его точка. Однако в ряде задач размеры тела можно не учитывать. *Материальной точкой* называют тело, размерами и внутренней структурой которого в конкретной физической задаче можно пренебречь, а всю массу тела считать сконцентрированной в одной точке. Тело можно рассматривать как материальную точку, если: 1) его размеры малы по сравнению с пройденным расстоянием или с расстоянием от этого тела до тела отсчета; 2) все точки тела движутся поступательно (т. е. в любой момент времени все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения и движутся по одинаковым траекториям). Материальная точка является идеальной физической моделью реального тела, которое рассматривается в конкретной задаче. При правильном использовании этого понятия основная задача механики решается сравнительно легко. Положение материальной точки в выбранной системе отсчета в момент времени t однозначно определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ или координатами.

Линию, которую описывает материальная точка при движении в определенной системе отсчета, называют *траекторией движения*. Вид траектории движения свободной материальной точки зависит от сил, которые действуют на нее, начальных условий и системы отсчета, а вид траектории движения несвободной точки — еще и от характера связей. В зависимости от вида траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

Прямолинейным называют движение, траекторией которого в данной системе отсчета является прямая линия. Для того чтобы тело в инерциальной системе отсчета двигалось по прямой, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, приложенных к нему, была либо равна нулю, либо направлена по касательной к траектории движения. (Здесь и далее под телом мы понимаем материальную точку, если только это не оговорено специально.)

Криволинейным называют движение, траекторией которого в данной системе отсчета является некоторая кривая линия (это движение в инерциальной системе отсчета имеет место, если равнодействующая всех сил направлена под углом α к скорости тела). Частными случаями криволинейного движения являются движение по окружности и прямолинейное движение. В первом случае угол $\alpha = \pi / 2$, во втором — равнодействующая всех сил, приложенных к телу, и скорость направлены в одну или в противоположные стороны.

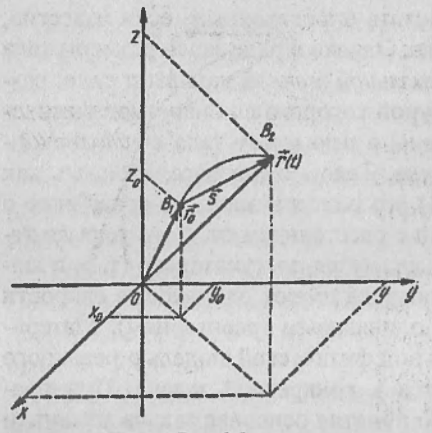

Рис. 1.1

Перемещением $\bar{s}$ движущейся материальной точки за определенный промежуток времени называют вектор, который соединяет ее положение в начальный момент времени $(t_0 = 0)$ с положением в следующий момент $(t > 0)$, т. е. $\bar{s} = \bar{r}(t) - \bar{r}_0$, где $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}_0$ — радиусы-векторы материальной точки в эти моменты времени (рис. 1.1).

На практике, как правило, нужно знать расстояние, пройденное материальной точкой вдоль траектории, т. е. *длину пути*, которая является скалярной величиной. В общем случае длина пути больше, чем модуль перемещения. Они совпадают только при прямолинейном движении в одну сторону. Чтобы охарактеризовать быстроту изменения положения материальной точки относительно данной системы отсчета, используют физическую величину, которую называют *скоростью движения*.

Средней скоростью движения материальной точки называют физическую векторную величину, характеризующую быстроту движения и численно равную отношению перемещения к промежутку времени, за который оно произошло, т. е. $\langle \bar{\upsilon} \rangle = \bar{s} / t$.

Мгновенной скоростью материальной точки называют скорость в данной точке траектории. Она равна отношению физически малого перемещения ко времени, т. е. $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{s}}{\Delta t} = \bar{s}'(t)$. Из определения мгновенной скорости следует, что она является первой производной от перемещения во времени.

Заметим, что физически малым называют такое перемещение, на котором скорость тела практически не изменялась. Если считать, что физически малый вектор $\Delta\bar{s}$ направлен по касательной к траектории движения, то вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории в каждой ее точке в сторону движения. При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль траектории.

Средним ускорением $\vec{a}$ называют физическую векторную величину, характеризующую быстроту изменения скорости материальной точки и численно равную изменению скорости в единицу времени, т. е. $\langle a \rangle = \Delta\vec{\upsilon} / \Delta t$. Ускорение материальной точки в данный момент времени называется мгновенным. *Мгновенное ускорение* равно первой производной от скорости по времени:

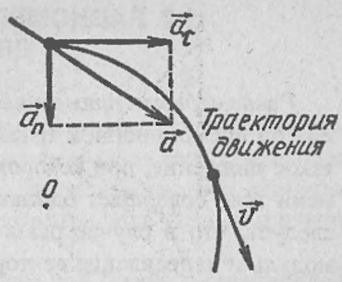

Рис. 1.2

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \upsilon'(t).$$

При криволинейном движении вектор скорости в любой момент времени направлен по касательной к траектории движения. Поскольку вектор ускорения параллелен вектору изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$, то он направлен в ту сторону, куда с течением времени поворачивается вектор $\vec{\upsilon}$, т. е. в сторону вогнутости траектории. При решении большинства задач вектор ускорения удобно представлять в виде геометрической суммы двух векторов, один из которых направлен по касательной, а другой — по нормали к траектории движения в каждой ее точке. Составляющая вектора ускорения, которая направлена по касательной к траектории, называется *тангенциальным ускорением* $\vec{a}_\tau$. Она характеризует быстроту изменения модуля скорости при криволинейном движении. Составляющая вектора ускорения, которая направлена по нормали к траектории, называется *нормальным ускорением* $\vec{a}_n$. Она характеризует быстроту изменения направления вектора скорости при криволинейном движении и всегда направлена вдоль радиуса к центру кривизны в данной точке траектории. Таким образом, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (рис. 1.2).

1.2. РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Равномерным прямолинейным движением называют движение по прямолинейной траектории с постоянной скоростью, т. е. такое движение, при котором за любые равные промежутки времени тело совершает одинаковые перемещения. Из определения следует, что в случае равномерного прямолинейного движения модуль и направление вектора скорости не изменяются. Поэтому в данном случае ускорение равно нулю. В инерциальной системе отсчета тело движется равномерно прямолинейно, если равнодействующая всех сил, приложенных к нему, равна нулю, а также если на него не действуют внешние силы. В данном случае $\vec{\upsilon} = \vec{s}/t$ или в скалярной форме $\upsilon = s/t$. За единицу скорости принимается скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором материальная точка за единицу времени проходит расстояние, равное единице. В СИ единица скорости является производной и выражается через единицу длины (1 м) и единицу времени (1с), т. е. $[\upsilon]$ = 1 м/с. Если учесть, что $\vec{s} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ и, кроме того, в данном случае $\vec{s} = \vec{\upsilon}\, t$, то зависимость радиуса-вектора движущейся материальной точки от времени имеет вид $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t$.

Эту зависимость, а также зависимости $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называют *кинематическими законами* механического движения. Поэтому кинематические законы равномерного прямолинейного движения в векторной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t, \\ \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0, \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{s} = \vec{\upsilon}t, \\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0, \\ \vec{a} = \vec{0}, \end{cases}$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – скорость материальной точки в момент времени $t_0 = 0$.

В проекциях на оси координат векторные уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}t, \\ \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x}, \\ a_x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(t) = y_0 + \upsilon_{0y}t, \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y}, \\ a_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(t) = z_0 + \upsilon_{0z}t, \\ \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z}, \\ a_z = 0. \end{cases}$$

Если вектор $\vec{\upsilon}_0$ направлен вдоль оси *OX*, то

$$y(t) = y_0,\ \upsilon_y(t) = 0;\ z(t) = z_0,\ \upsilon_z(t) = 0\,.$$

При равномерном прямолинейном движении скорость постоянна, поэтому график зависимости модуля скорости от времени представляет собой прямую линию, параллельную оси времени (рис. 1.3). Модуль перемещения на этом графике численно равен площади прямоугольника.

Поскольку перемещение материальной точки, движущейся прямолинейно и равномерно, прямо пропорционально времени $\vec{s} = \vec{\upsilon}\ t$, то график зависимости модуля перемещения от времени представляет собой прямую, которая проходит через начало координат (рис. 1.4). Угловой коэффициент этой прямой численно равен скорости движения, т. е. $\upsilon = tg\alpha$.

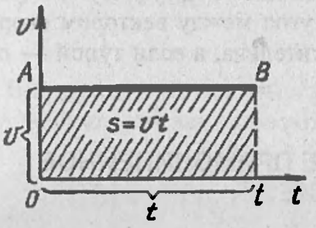

Рис. 1.3

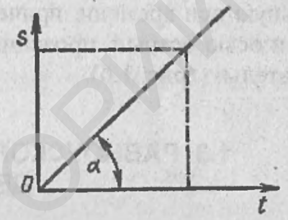

Рис. 1.4

Самая простая система отсчета для описания прямолинейного движения представляет собой тело отсчета, которое одновременно является нулевой точкой оси *OX*, направленной вдоль линии движения, и часы, которые включают в момент времени, когда координата материальной точки равна x_0. Поэтому, если материальная точка движется в положительном направлении оси *OX*, ее координата в этой системе отсчета в произвольный момент времени $x(t) = x_0 + s_x$, где x_0 — начальная координата материальной точки; s_x – проекция перемещения на ось *OX*. Поскольку $\upsilon_x(t) = \upsilon_0$, то $s_x = \upsilon_0 t$, поэтому $x(t) = x_0 + \upsilon_0 t$.

Если материальная точка движется в сторону, противоположную оси *OX*, то $\upsilon_x(t) = -\upsilon_0$, $s_x = -\upsilon_0 t$. В этом случае $x(t) = x_0 - \upsilon_0 t$.

В обоих случаях координата является линейной функцией времени. Поэтому график зависимости координаты от времени

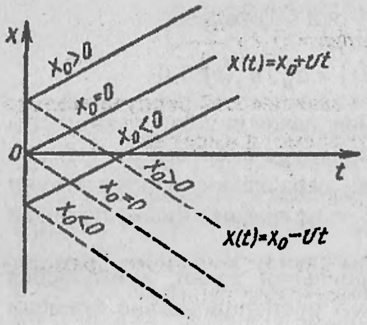

Рис. 1.5

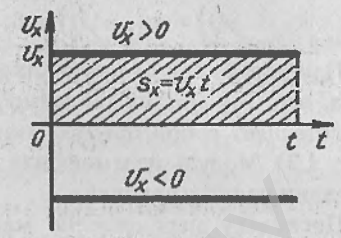

Рис. 1.6

представляет собой прямую линию, вид которой определяется функцией $x = x(t)$ (рис. 1.5). Зависимость проекции вектора скорости на ось OX от времени представляет собой прямую, параллельную оси времени, причем если угол между вектором скорости и осью острый, проекция положительна, а если тупой — отрицательна (рис. 1.6).

1.3. РАВНОУСКОРЕННОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Равноускоренным прямолинейным движением называют движение тела по прямой с постоянным по модулю ускорением, т. е. такое прямолинейное движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость движения материальной точки изменяется одинаково.

В данном случае нормальное ускорение $\vec{a}_n = \vec{0}$. Поэтому полное ускорение равно тангенциальному $\vec{a} = \vec{a}_\tau = \text{const}$. По определению $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$. С другой стороны, $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$, где $\vec{\upsilon}_0$ — скорость в начальный момент времени $(t_0 = 0)$; $\vec{\upsilon}$ — скорость в момент времени t. Поэтому $\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t}$, откуда $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t$. Эту формулу иногда называют ***первым кинематическим законом*** равноускоренного прямолинейного движения.

Поскольку мгновенная скорость — это первая производная от перемещения по времени, т. е. $\vec{\upsilon}(t) = \vec{s}\,'(t)$, то перемещение является первообразной от скорости, т. е.

$$\vec{s} = \int_0^t \vec{\upsilon}(t)dt = \int_0^t (\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t)dt = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Если учесть, что $\vec{s} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$, то зависимость радиуса-вектора движущейся материальной точки от времени имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Поэтому кинематические законы равноускоренного прямолинейного движения в векторной форме можно записать:

$$\begin{cases} r(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}, \\ \upsilon(t) = \vec{\upsilon}_0 + at, \\ a = \text{const} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{s}(t) = \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}, \\ \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t, \\ \vec{a} = \text{const}. \end{cases}$$

В проекциях на оси координат законы равноускоренного прямолинейного движения имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t, \\ a_x = \text{const}, \end{cases} \quad \begin{cases} y(t) = y_0 + \upsilon_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2}, \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t, \\ a_y = \text{const}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + \upsilon_{0z} t + \dfrac{a_z t^2}{2}, \\ \upsilon_z(t) = \upsilon_{0z} + a_z t, \\ a_z = \text{const}. \end{cases}$$

Если материальная точка движется вдоль оси OX, то $y(t) = y_0, \upsilon_y(t) = 0, a_y(t) = 0; z(t) = z_0, \upsilon_z(t) = 0, a_z(t) = 0$. В этом случае $\upsilon_{0x} = \pm\upsilon_0, a_x(t) = \pm a$, поэтому $\upsilon_x(t) = \pm\upsilon_0 \pm at$. Проекция вектора скорости на ось OX является линейной функцией от времени, поэтому график $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ представляет собой прямую, угловой коэффициент которой равен проекции ускорения на эту

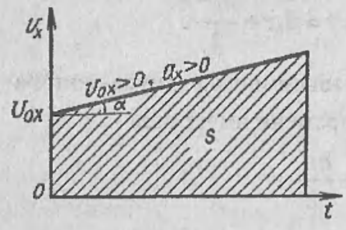

Рис. 1.7

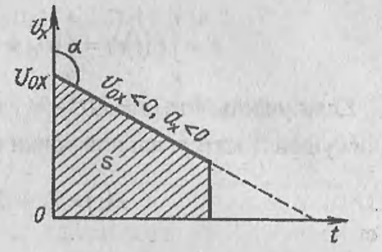

Рис. 1.8

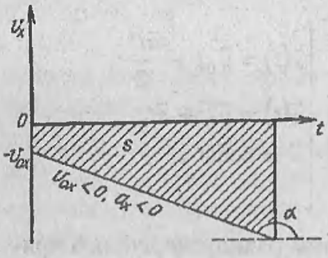

Рис. 1.9

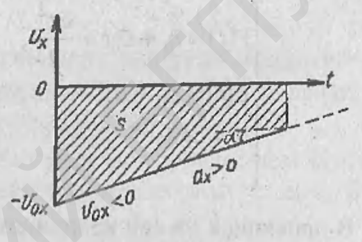

Рис. 1.10

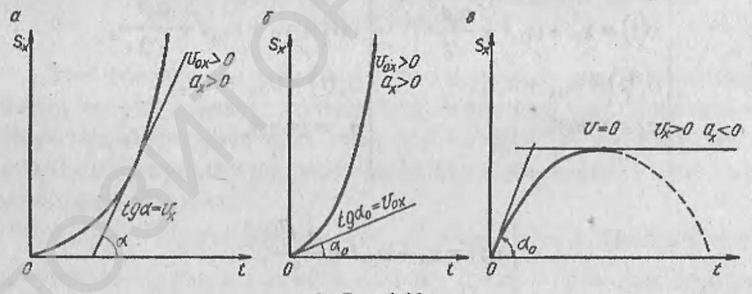

Рис. 1.11

ось (рис. 1.7 — 1.10). Модули перемещения на этих графиках численно равны площадям соответствующих трапеций.

Проекция перемещения на ось OX является квадратичной функцией от времени. Поэтому график $s_x = s_x(t)$ представляет собой параболу. На рис. 1.11 приведены графики $s_x(t)$ для случая, когда направление вектора $\vec{\upsilon}$ совпадает с положительным направлением оси OX. Проекция мгновенной скорости движения на ось OX на приведенных графиках равна угловому коэффициенту касательной к параболе в соответствующей точке.

1.4. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Из определения механического движения следует, что положение тела, а значит и его координаты, относительно различных тел отсчета будут разными. Поэтому говорить о механическом движении можно только в конкретной системе отсчета. В другой системе отсчета физические величины, характеризующие механическое движение, будут не такими, как в первой.

Преобразование законов движения тела при переходе от одной системы отсчета к другой осуществляется на основе *принципа независимости движений*, который является результатом обобщения экспериментальных данных. Согласно этому принципу, если тело участвует в нескольких движениях одновременно, то его результирующее перемещение равно векторной сумме перемещений в отдельных движениях, т. е. $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + ... + \vec{s}_n$. Если разделить последнее выражение на время движения, получим $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + ... + \vec{\upsilon}_n$, т. е. результирующая скорость равна геометрической сумме скоростей отдельных независимых движений. Последнее утверждение называют *правилом сложения скоростей* (иногда классическим законом сложения скоростей).

На практике чаще всего встречаются такие сложные движения, которые состоят из двух более простых. В этом случае удобно ввести дополнительную подвижную систему отсчета. Движение тела относительно неподвижной системы отсчета называют *абсолютным*, движение тела относительно подвижной системы — *относительным*, а движение самой подвижной системы отсчета относительно неподвижной — *переносным*. Соответствующие этим движениям скорости называют *абсолютной*, *относительной* и *переносной*. Абсолютное перемещение тела равно геометрической сумме его относительного и переносного перемещений: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. Абсолютная скорость тела равна геометрической сумме его относительной и переносной скоростей: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи сложного движения, состоящего из двух простых.

1. Если векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ направлены в одну сторону, то $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, т. е. абсолютная скорость равна сумме относительной и переносной скоростей и направлена в ту же сторону.

2. Если векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ направлены в противоположные стороны, то $\upsilon = |\, \upsilon_1 - \upsilon_2 \,|$, т. е. абсолютная скорость равна разности скоростей и направлена в сторону большей скорости.

3. Если векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ взаимно перпендикулярны, то абсолютная скорость будет равна диагонали прямоугольника, сторонами которого являются относительная и переносная скорости. Модуль абсолютной скорости определяется по теореме Пифагора, т. е. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$, а ее направление задается углом φ, который определяется из формулы $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ (рис. 1.12).

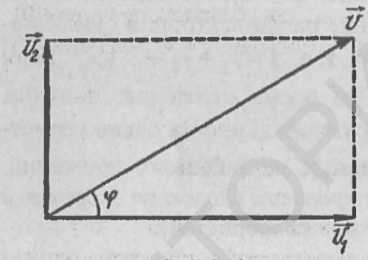

Рис. 1.12

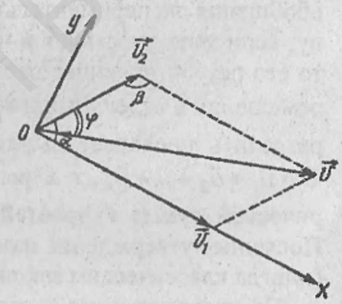

Рис. 1.13

В общем случае (рис. 1.13) модуль абсолютной скорости находится по теореме косинусов:

$$\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos\beta .$$

Поскольку $\beta = 180^0 - \alpha$, то $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2 \cos\alpha}$.

Направление абсолютной скорости (угол φ между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}_2$) находится по теореме синусов:

$$\frac{\upsilon_1}{\sin\varphi} = \frac{\upsilon}{\sin\beta}, \text{ т. е. } \varphi = \arcsin\left(\frac{\upsilon_1 \sin\alpha}{\upsilon}\right).$$

Если систему отсчета выбрать так, чтобы векторы $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ находились в одной плоскости, например в плоскости *XY*, то в проекциях на оси координат получим

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{1x} + \upsilon_{2x}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{1y} + \upsilon_{2y}. \end{cases}$$

Модуль абсолютной скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$. Угол, который образует вектор $\vec{\upsilon}$ с осью OX, определяется из формулы $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \dfrac{\upsilon_{1y} + \upsilon_{2y}}{\upsilon_{1x} + \upsilon_{2x}}$ (рис. 1.14).

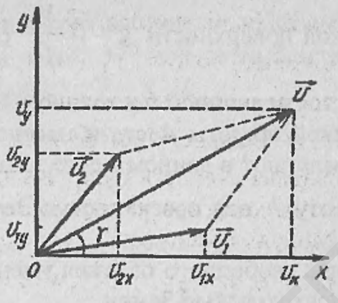

Рис. 1.14

В заключение отметим, что данное правило сложения скоростей справедливо только в том случае, если скорости движения малы по сравнению со скоростью света. При скоростях движения, близких к скорости света, правило сложения скоростей записывается в релятивистской форме (см. § 13.4).

1.5. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ

Свободным падением называется движение тела под действием только силы тяжести. В общем случае свободное падение является криволинейным движением.

Если не учитывать вращение Земли вокруг собственной оси, то сила тяжести есть сила гравитационного притяжения между телом и Землей, т. е. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$. Согласно второму закону Ньютона, эта сила сообщает телу ускорение $\vec{g}$, которое называется *ускорением свободного падения.* Численно $g = \dfrac{F}{m}$ или $g = G\dfrac{M}{r^2}$. Анализ последней формулы дает возможность сделать следующие выводы: ускорение свободного падения не зависит от массы тела (экспериментально этот факт доказан Галилеем). Ускорение свободного падения зависит только от расстояния между телом, которое падает, и центром Земли. Без учета вращения Земли вокруг собственной оси вектор $\vec{g}$ направлен к центру Земли. Фактически направление вектора $\vec{g}$ совпадает с направлением вертикали (к центру Земли этот вектор направлен только на полюсах и на экваторе). В данной точке земной поверхности $g = G\dfrac{M}{R^2}$ (где R — радиус Земли), т. е. является величиной постоянной. Его значение зависит от географической широты места и плотности геологических пород, которые залегают в данном месте земной коры. Если тело поднято на высоту h над поверхностью Земли, то $g = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$, т. е. ускорение свободного падения уменьшается по мере поднятия тела над поверхностью Земли.

По мере опускания тела в глубь Земли g линейно уменьшается и в ее центре обращается в нуль.

Для доказательства этого утверждения проведем мысленный эксперимент. Пусть тело массой m находится в тоннеле, выкопанном по направлению к центру Земли, на глубине h. Будем считать, что Земля является сплошным однородным шаром. Разобьем его на тонкие концентрические слои толщиной Δh. Пусть тело находится в точке A. Силы притяжения, действующие на тело со стороны элементов слоя массами Δm_1 и Δm_2 (рис. 1.15), которые находятся внутри конуса с малым телесным углом ω и вершиной в точке A, соответственно равны

$$F_1 = G\frac{m\Delta m_1}{r_1^2},\ F_2 = \frac{m\Delta m_2}{r_2^2}$$

и направлены в противоположные стороны. Причем $\Delta m_1 = \rho\Delta V_1 = \rho\Delta S_1\Delta h$, $\Delta m_2 = \rho\Delta V_2 = \rho\Delta S_2\Delta h$, где ΔS_1 и ΔS_2 — площади соответствующих элементов; ρ — плотность Земли.

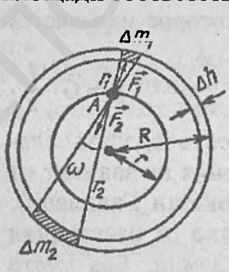

Рис. 1.15

Из определения телесного угла следует, что $\omega = \dfrac{\Delta S_1}{r_1^2} = \dfrac{\Delta S_2}{r_2^2}$. Поэтому $\Delta m_1 = \rho\omega r_1^2\Delta h$, $\Delta m_2 = \rho\omega r_2^2\Delta h$. С учетом этого получим: $F_1 = Gm\rho\omega\Delta h$, $F_2 = Gm\rho\omega\Delta h$, т. е. $F_1 = F_2$. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены в противоположные стороны, поэтому их равнодействующая равна нулю.

Таким образом, равнодействующая сил притяжения, действующих на тело со стороны каждого концентрического слоя, равна нулю. Поэтому на тело, находящееся в тоннеле, действует только сила притяжения со стороны массы M' той части Земли, которая заключена внутри сферы радиусом $r = R - h$.

С учетом этого $g = G\dfrac{M'}{r^2}$. Если учесть, что $M' = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$, получим $g = \dfrac{4}{3}\pi\rho G r = \dfrac{4}{3}\pi\rho G(R-h)$.

График зависимости модуля ускорения свободного падения от расстояния между телом и центром Земли приведен на рис. 1.16.

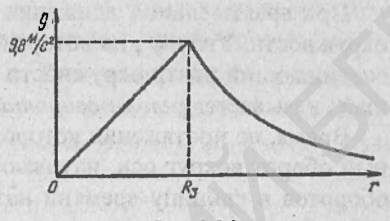

Рис. 1.16

Нормальным ускорением свободного падения называют ускорение свободного падения на широте 45° на уровне моря $(h = 0)$. Оно равно 9,80665 м/с².

Поскольку в данном месте земной поверхности модуль и направление вектора ускорения свободного падения постоянны, движение тела, брошенного вертикально вниз или вверх, является равноускоренным прямолинейным движением (это следует из определения равноускоренного движения). Поэтому кинематические законы движения в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}, \\ \vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t, \\ \vec{g} = \mathrm{const} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{s} = \vec{\upsilon}_0 t + \dfrac{\vec{g}t^2}{2}, \\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t, \\ \vec{g} = \mathrm{const}. \end{cases}$$

В проекциях на оси координат кинематические законы свободного падения имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \dfrac{g_x t^2}{2}, \\ \upsilon_x = \upsilon_{0x} + g_x t, \end{cases} \quad \begin{cases} y(t) = y_0 + \upsilon_{0y} t + \dfrac{g_y t^2}{2}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + g_y t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + \upsilon_{0z} + \dfrac{g_z t^2}{2}, \\ \upsilon_z = \upsilon_{0z} + g_z t. \end{cases}$$