Весці БДПУ. Серыя 3. 2016. № 2. С. 23–28

УДК 517.968.72

ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Ю. Русецкий,
аспирант кафедры функционального анализа БГУ

Поступила в редакцию 05.04.16.

UDC 517.968.72

LINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEMS IN ALGEBRA OF GENERALIZED RANDOM PROCESSES

A. Rusetski,
postgraduate student of functional analysis department of BSU

Received in 05.04.16.

В работе рассматривается задача Коши для линейной стохастической дифференциальной системы уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов. Исследуются существования и единственности решений интегральных уравнений, которые являются ассоциированными решениями исходной задачи Коши в алгебре обобщенных случайных процессов. Доказывается теорема о представлении ассоциированных решений через ассоциированные фундаментальные матрицы.

Ключевые слова: линейная стохастическая дифференциальная система, алгебра обобщенных случайных процессов, ассоциированные решения, ассоциированные фундаментальные матрицы.

Cauchy problem for linear differential equations in algebra of generalized random processes is considered in the paper. Problems of existence and uniqueness of the solutions of the integral equations that are associated solutions corresponding to the initial problem of the equation in algebra of generalized random processes are investigated. Theorem about representation of associated solutions by associated fundamental matrices is proved.

Keywords: linear stochastic differential system, algebra of generalized random processes, associated solutions, associated fundamental matrices.

Введение. Рассмотрим задачу Коши для линейной системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X'(t,\omega) = L'(t)X(t,\omega) + g(t)W'(t,\omega), \\ X(0,\omega) = X_0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $t \in T = [0,b], \omega \in \Omega$,

$$X(t,\omega) = (X_i(t,\omega))^T, X_0 = (X_0^i)^T \in \mathbb{R}^m, i = \overline{1,m}$$

$$W'(t,\omega) = (W_i'(t,\omega))^T \in \mathbb{R}^m,$$

где

$$W_i'(t,\omega) = 0, i = \overline{1,m-1} \text{ и } W_m'(t,\omega) = w'(t,\omega),$$

$$L'(t) = (L_{ij}'(t)),$$

где $L_{ij}'(t) = 1$, при $i = j-1$, и $L_{ij}'(t) = 0$, при $i \neq j-1$, если $i = \overline{1,m-1}, j = \overline{1,m}$ и $L_{mj}'(t) = -a_j'(t)$, где $a_j : T \to \mathbb{R}, j = \overline{1,m}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, $w(t,\omega)$ – винеровский процесс, а $a_j'(t), j = \overline{1,m}, w'(t,s)$ – их обобщенные производные, $g(t) \in L_2(T)$.

Данная задача является некорректной в рамках классической теории дифференциальных уравнений, поскольку в уравнениях могут присутствовать произведения обобщенных функций.

Линейные стохастические дифференциальные уравнения рассматривались рядом авторов [1; 2]. Системы стохастических дифференциальных уравнений вида (1) могут использоваться в качестве моделей, описывающих динамику финансовых данных [3].

В настоящей работе задача Коши (1) исследуется в алгебре обобщенных случайных процессов [4].

Напомним некоторые понятия алгебры обобщенных случайных процессов из работы [5].

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – полное вероятностное пространство, $T = [0,b] \subset \mathbb{R}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ – стандартный поток σ-алгебр, $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{A}$.

Рассмотрим множество последовательностей функции

$$f_n(t,\omega):\mathbb{N}\times T\times\Omega\to\mathbb{R},$$

таких, что $f_n(t,\omega)$ – случайная величина на $(\Omega,\mathcal{A},P)$ для любого $t\in T$ и $n\in\mathbb{N}$.

Элементы $F=(f_n)$ и $G=(g_n)$ данного множества назовем эквивалентными, если существует такое n_0, что

$$f_n(t,\omega)=g_n(t,\omega)$$

для любых $t\in T$, почти всех $\omega\in\Omega$ и $\forall n>n_0$.

Множество классов эквивалентных последовательностей такого вида обозначим $\zeta(T,\Omega)$, если для любых $n\in\mathbb{N}, f_n(t,\omega)\in C^\infty(T)$ для почти всех $\omega\in\Omega$.

Несложно видеть, что $\zeta(T,\Omega)$ является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения. Далее, пусть

$\tilde{T}=\{\tilde{t}=[(t_n)]\in\mathbb{R}:\forall(t_n)\in\tilde{t},0\le t_n\le a,n=1,2,\ldots\}$,

где $\mathbb{R}$ – расширенная вещественная прямая. Через $(\zeta(\tilde{T},\Omega))$ обозначим алгебру обобщенных случайных процессов $\tilde{F}(\tilde{t},\omega)$ вида:

$$\tilde{F}(\tilde{t},\omega)=[(f_n(t_n,\omega))],$$

где $\tilde{t}=[(t_n)]\in\tilde{T}$, а $[(f_n(t,\omega))]\in\zeta(T,\Omega)$.

Введем на $\mathbb{R}$ множество

$$\mathbf{H}=\{\tilde{h}=[(h_n)]\in\tilde{\mathbb{R}}_+\setminus\tilde{0}\mid\lim_{n\to\infty}h_n=0\}$$

и для $\forall\tilde{F}=[(f_n)]$ из $\zeta(\tilde{T},\Omega)$ положим по определению

$d_{\tilde{h}}\tilde{F}(\tilde{t},\omega)=[(f_n(t+h_n,\omega)-f_n(t,\omega))]$,

где $\tilde{t}=[(t)]\in\tilde{T},\tilde{h}\in\mathbf{H},\tilde{t}+\tilde{h}\in\tilde{T}$.

Через $\zeta^n(T,\Omega),\zeta^n(\tilde{T},\Omega)$ обозначим прямое произведение алгебр $\zeta(T,\Omega)$ и $\zeta(\tilde{T},\Omega)$ соответственно.

Определение 1. Будем говорить, что обобщенный случайный процесс

$$F(t,\omega)=[(f_n(t,\omega))]\in\zeta(T,\Omega)$$

ассоциирует классический случайный процесс, если для любых представителей $(f_n)\in F$, последовательность $f_n(t,\omega)$ сходится при $n\to\infty$ к данному процессу по вероятности и в L_1 по $t\in T$.

Далее будем полагать, что $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, а интегралы и дифференциалы от матричнозначных и векторнозначных функций берутся покоординатно.

Ассоциированные решения задачи Коши

Задаче Коши (1) поставим в соответствие задачу в алгебре $\zeta^m(\tilde{T},\omega)$

$$\begin{cases}d_{\tilde{h}}\widetilde{X}(\tilde{t},\omega)=d_{\tilde{h}}\tilde{L}(\tilde{t})\widetilde{X}(\tilde{t},\omega)+\tilde{g}(\tilde{t})d_{\tilde{h}}\widetilde{W}(\tilde{t},\omega),\\ \widetilde{X}|_{[0,\tilde{h})}=\widetilde{X}_0(\tilde{t},\omega),\end{cases}\quad(2)$$

где

$\widetilde{X}(\tilde{t},\omega)=(\widetilde{X}_i(\tilde{t},\omega))^T=([(X_n^i(t_n,\omega))])^T$,

$\widetilde{X}_0(\tilde{t},\omega)=(\widetilde{X}_0^i(\tilde{t},\omega))^T=([(X_{n0}^i(t_n,\omega))])^T, i=\overline{1,m}$

$\widetilde{W}(\tilde{t},\omega)=(\widetilde{W}_i(\tilde{t},\omega))^T=(\tilde{0},\ldots,\tilde{0},\widetilde{w}(\tilde{t},\omega))^T=$

$=([(0)],\ldots,[(0)],[(w_n(t_n,\omega))])^T$,

$\tilde{g}(\tilde{t})=[(g_n(t_n))],\tilde{0}=[(0)],\tilde{h}=[(h_n)]$,

$\tilde{L}(\tilde{t})=(\widetilde{L_{ij}}(\tilde{t}))$,

где $\widetilde{L_{ij}}(\tilde{t})=\tilde{t}=[(t_n)]$, при $i=j-1$,

и $\widetilde{L_{ij}}(\tilde{t})=\tilde{0}=[(0)]$, при $i\ne j-1$,

если

$i=\overline{1,m-1}, j=\overline{1,m}$ и $\widetilde{L_{mj}}(\tilde{t})=-\widetilde{a_j}(\tilde{t})=[(-a_n^j(t_n))]$,

где $j=\overline{1,m}$.

На уровне представителей задача Коши (2) примет вид

$$\begin{cases}X_n(t+h_n,\omega)-X_n(t,\omega)=[L_n(t+h_n)-\\ -L_n(t)]X_n(t,\omega)+g_n(t)[W_n(t+h_n,\omega)-W_n(t,\omega)],\\ X_n(t,\omega)|_{[0,h_n)}=X_n^0(t,\omega),\end{cases}\quad(3)$$

где

$$X_n(t,\omega)=(X_n^i(t,\omega))^T,$$

$$X_n^0(t,\omega)=(X_{n0}^i(t,\omega))^T, i=\overline{1,m}$$

$$W_n(t,\omega)=(W_n^i(t,\omega))^T,$$

где $W_n^i(t,\omega)=0, i=\overline{1,m-1}$

и $W_n^m(t,\omega)=w_n(t,\omega)$,

$$L_n(t)=(L_n^{ij}(t)),$$

где $L_n^{ij}(t)=1$, при $i=j-1$,

и $L_n^{ij}(t)=0$, при $i\ne j-1$,

если $i=\overline{1,m-1}, j=\overline{1,m}$ и $L_n^{mj}(t)=-a_n^j(t)$,

$$a_n^j(t)=(a_j*\rho_n^j)(t),\rho_n^j(t)=\gamma_j(n)\rho(\gamma_j(n)t),$$

где $\gamma_j(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, $j=\overline{1,m}$,

$$\rho\ge0,\rho\in C^\infty(\mathbb{R}),supp(\rho)\subseteq[0,1],\int_0^1\rho(s)ds=1.$$

Теорема 1. Решение задачи (2) в прямом произведении алгебр $\zeta^m(\tilde{T},\omega)$ существует и единственное тогда и только тогда, когда для любых представителей

$$(h_n),(L_n),(X_n^0),(g_n),(W_n)$$

и для $l=0,1,\ldots$ при $s\to+0$ и почти всех $\omega\in\Omega$ выполняются следующие условия:

$$\Big|\Big|\frac{d^l}{dt^l}X_n^0(h_n-s,\omega)-\frac{d^l}{dt^l}X_n^0(s,\omega)-$$
$$-\frac{d^l}{dt^l}\big[[L_n(h_n+s)-L_n(s)]X_n^0(s,\omega)\big]-$$
$$-\frac{d^l}{dt^l}\big[g_n(s)[W_n(h_n+s,\omega)-W_n(s,\omega)]\big]\Big|\Big|\to 0.$$

Доказательство теоремы 1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 в работе [6].

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где

$$\tau_t\in[0,h_n),m_t\in\mathbb{N}.$$

Обозначим $t_k=\tau_t+kh_n,k=1,\ldots,m_t-1$.

Решение системы можно записать в виде

$$X_n(t,\omega)=X_n(\tau_t,\omega)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}[L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)]X_n(t_k,\omega)+ \qquad (4)$$
$$+\sum_{k=0}^{m_t-1}g_n(t_k)[W_n(t_{k+1},\omega)-W_n(t_k,\omega)].$$

Определение 2. Ассоциированным решением задачи (2) в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов $\zeta^m(\tilde{T},\omega)$ будет предел выражения (4) при $n\to\infty,h_n\to 0$, в $L_1(T)$, по вероятности.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$X(t,\omega)=X_0+\int_0^t dL^p(s)X(s,\omega)+\int_0^t g(s)dW(s,\omega),$$
$$t\in T,\omega\in\Omega, \qquad (5)$$

где $L^p(t)=L^c(t)+\sum_{\mu_l\le t}\Delta L^p(\mu_l),t\in T,p=\overline{1,2^m}$,

$L^c(t)$ – непрерывная часть функции $L(t)$, $\mu_l,l\in\mathbb{N}$ – точки разрыва $L(t)$.

$$\Delta L^p(t)=(\Delta L_{ij}^p(t)),p=\overline{1,2^m},$$

где $\Delta L_{ij}^p(t)=0$, при $i=\overline{1,m-1},j=\overline{1,m}$.

Если $\frac{1}{\gamma_m(n)}=o(h_n)$, то

$$\Delta L_{mj}^p(t)=\begin{cases}-\Delta a_m(\mu_l), \\ \quad j=m, \\ -\Delta a_i(\mu_l), \\ \quad \text{если } \frac{1}{\gamma_i(n)}=o(h_n),i=\overline{1,m-1}, \\ -\Delta a_i(\mu_l)(1-\Delta a_m(\mu_l)), \\ \quad \text{если } h_n=o(\frac{1}{\gamma_i(n)}),i=\overline{1,m-1}.\end{cases}$$

Если $\quad=o(\frac{}{(\ )})$, то

$$\Delta L_{mj}^p(t)=\begin{cases}e^{-\Delta a_m(\mu_l)}-1, \\ \quad j=m, \\ -\Delta a_j(\mu_l), \\ \quad \text{если } \frac{1}{\gamma_j(n)}=o(h_n),j=\overline{1,m-1}, \\ \frac{\Delta a_j(\mu_l)}{\Delta a_m(\mu_l)}(e^{-\Delta a_m(\mu_l)}-1), \\ \quad \text{если } h_n=o(\frac{1}{\gamma_j(n)}),j=\overline{1,m-1}.\end{cases}$$

Если же $\Delta a_m(\mu_l)=0$, то

$$\Delta L_{ij}^p(t)=\begin{cases}0,i=\overline{1,m-1},j=\overline{1,m}, \\ -\Delta a_j(\mu_l),i=m,j=\overline{1,m},\end{cases}\quad p=\overline{1,2^m}.$$

В уравнении (5) первый интеграл понимается как неклассический интеграл Римана–Стилтьеса [7, с. 48], а второй как стохастический интеграл от неслучайной функции [8, с. 51].

Теорема 2. Пусть $a_i:T\to\mathbb{R},i=\overline{1,m}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, $g(t)\in L_2(T)$.

Тогда решение уравнения (5), $\forall p=\overline{1,2^m}$ существует и единственно в пространстве непрерывных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой

$$\|X(t,\omega)\|_X=\sup_{[0,T]}\left(E\|X(t,\omega)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство теоремы проводится с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке [9, с. 60].

Теорема 3. Пусть $a_i : T \to \mathbb{R}, i = \overline{1,m}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, $g(t) \in L_2(T)$, $X_n(t,\omega)$ – решение задачи Коши (3) и

$$\sup_{t \in [0,h_n)} E \| X_n^0(t,\omega) - X_0 \|^2 \xrightarrow[n\to\infty, h_n \to 0]{} 0.$$

Тогда при $n \to \infty, h_n \to 0$ так, что

$$\frac{1}{\gamma_i(n)} = \mathrm{o}(h_n)$$

или

$$= \mathrm{o}(\frac{}{(\ )})$$

для всех $i = \overline{1,m}$

$$\int_T E \| X_n(t,\omega) - X(t,\omega) \|^2 \to 0,$$

где $X(t,\omega)$ – решение системы (5).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из работы [10].

Представление решений

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения, соответствующего исследуемой задаче (1):

$$\begin{cases} X'(t) = L'(t) X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \qquad (6)$$

где $t \in T = [0,b]$,

$$X(t) = (X_i(t))^T,$$

$$X_0 = (X_0^i)^T \in \mathbb{R}^m, i = \overline{1,m}$$

$$L'(t) = (L_{ij}'(t)),$$

где $L_{ij}'(t) = 1$, при $i = j - 1$,
и $L_{ij}'(t) = 0$, при $i \neq j - 1$,
если $i = \overline{1,m-1}, j = \overline{1,m}$ и $L_{mj}'(t) = -a_j'(t)$,
где $a_j : T \to \mathbb{R}, j = \overline{1,m}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации,
$a_j'(t), j = \overline{1,m}$ – их обобщенные производные.

Уравнения вида (6) исследовались в работах [11; 12].

Пусть $B^i(t,s)$ – ассоциированные фундаментальные матрицы системы (6), $i = \overline{1,2^m}$ [13].

Теорема 4. Ассоциированные решения задачи Коши (2) представимы в виде:

$$X^p(t,\omega) = B^p(t,0) X_0 + \int_0^t B^p(t,s) g(s) dW(s,\omega),$$

$$t \in T, p = \overline{1,2^m},$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, где $B^p(t,s), p = \overline{1,2^m}$ – ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной системы (6), $g(t) \in L_2(T)$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что ассоциированными решениями задачи Коши (2) являются решения соответствующих интегральных уравнений (5).

Подставим предполагаемое решение в соответствующее интегральное уравнение:

$$B^i(t,0) X^i(0,\omega) + \int_0^t B^i(t,s) g(s) dW(s,\omega) =$$

$$= X^i(0,\omega) + \int_0^t dL^i(s) [B^i(s,0) X^i(0,\omega) +$$

$$+ \int_0^s B^i(s,r) g(r) dW(r,\omega)] + \int_0^t g(s) dW(s,\omega),$$

где $L^p(t)$ определяется так же, как в уравнении (5), а интеграл по $L^p(t)$ понимается как неклассический интеграл Римана–Стилтьеса, а интеграл по $W(s,\omega)$ как стохастический интеграл от неслучайной функции.

Поскольку $B^p(t,0) X_0$ является ассоциированным решением однородного дифференциального уравнения (6) [13, теорема 4], то

$$B^i(t,0) X^i(0,\omega) =$$

$$= X^i(0,\omega) + \int_0^t dL^i(s) B^i(s,0) X^i(0,\omega).$$

Отсюда получим:

$$\int_0^t B^i(t,s) g(s) dW(s,\omega) =$$

$$= \int_0^t dL^i(s) \int_0^s B^i(s,r) g(r) dW(r,\omega) +$$

$$+ \int_0^t g(s) dW(s,\omega).$$

Распишем фундаментальную матрицу по определению:

$$B^i(t,r) = E + \int_r^t dL^i(s) B^i(s,r).$$

Подставляя определение в правую часть, получим:

$$\int_0^t [E+\int_s^t dL^i(r)B^i(r,s)]g(s)dW(s,\omega)=$$

$$=\int_0^t dL^i(s)\int_0^s B^i(s,r)g(r)dW(r,\omega)+$$

$$+\int_0^t g(s)dW(s,\omega).$$

В итоге придем к следующему равенству:

$$\int_0^t\int_s^t dL^i(r)B^i(r,s)g(s)dW(s,\omega)=$$

$$=\int_0^t dL^i(s)\int_0^s B^i(s,r)g(r)dW(r,\omega).$$

Положим, что

$$B^i(t,s)=\begin{cases}B^i(t,s), t>s\\ 0, t\le s\end{cases}.$$

$$W_1=\int_0^t dL^i(s)\int_0^s B^i(s,r)g(r)dW(r,\omega)$$

$$W_2=\int_0^t\int_0^t dL^i(r)B^i(r,s)g(s)dW(s,\omega)$$

Оба интеграла представляют собой случайные величины из пространства, получающегося замыканием в среднеквадратичном всевозможных линейных комбинаций:

$$\sum_k c_k\Delta_k W(s_k).$$

Таким образом, если мы покажем, что разность W_1-W_2 ортогональна всем величинам вида

$\Delta W(t_1)$, $\Delta=(t_1,t_2)$, $0\le t_1<t_2\le b$,

то есть

$$E[W_1\Delta W(t_1)]=E[W_2\Delta W(t_1)],$$

то тем самым будет доказано, что $W_1=W_2$ [14, с. 58].

В итоге, мы имеем

$$E[W_1\Delta W(t_1)]=$$

$$=\int_0^t dL^i(s)E[\int_0^s B^i(s,r)g(r)dW(r,\omega)\Delta W(t_1)]=$$

$$=\int_0^t dL^i(s)[\int_{t_1}^{t_2} B^i(s,r)g(r)dr],$$

$$E[W_2\Delta W(t_1)]=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t dL^i(r)B^i(r,s)g(s)ds.$$

Для интеграла Римана–Стилтьеса:

$$\int_0^t dL^i(s)[\int_{t_1}^{t_2} B^i(s,r)g(r)dr]=$$

$$=\int_0^t dL^i(s)E[\int_0^s B^i(s,r)g(r)dW(r,\omega)\Delta W(t_1)].$$

Отсюда следует, что исходная формула представления решения справедлива.

Литература

1. *Arnold, L.* Stochastic Differential Equations / L. Arnold – New York : Wiley, 1974.
2. *Арато, М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход / М. Арато – М. : Наука, 1989. – 304 с.
3. *Медведев, Г. А.* Стохастические процессы финансовой математики / Г. А. Медведев. – Мнинск : БГУ, 2005. – 243 с.
4. *Лазакович, Н. В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Доклады НАН РБ. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
5. *Лазакович, Н. В.* Аппроксимация стохастических интегралов Ито и Стратоновича элементами прямого произведения алгебр обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович, С. П. Сташуленок // Теория вероятн. и ее примен. – 1996. – Т. 41, вып. 4. – С. 785–809.

References

1. *Arnold, L.* Stochastic Differential Equations / L. Arnold – New York : Wiley, 1974.
2. *Arato, M.* Lineynyye stokhasticheskiye sistemy s postoyannymi koeffitsientami. Statisticheskiy podkhod / M. Arato. – M. : Nauka, 1989. – 304 s.
3. *Medvedev, G. A.* Stokhasticheskiye protsessy finansovoy matematiki / G. A. Medvedev. – Minsk : BSU, 2005. – 243 s.
4. *Lazakovich, N. V.* Stokhasticheskiye differentsialy v algebra obobshchyonnykh sluchaynykh protsessov / N. V. Lazakovich // Doklady NAN RB. – 1994. – T. 38. – № 5. – S. 23–27.
5. *Lazakovich, N. V.* Approksimatsiya stokhasticheskikh integralov Ito i Stratonovicha elementami pryamogo proizvedeniya algebra obobshchyonnykh sluchaynykh protsessov / N. V. Lazakovich, S. P. Stashulyonok // Teoriya veroyatn. i eyo primen. – 1996. – T. 41, vyp. 4. – S. 785–809.

6. *Розин, Е. Б.* Уравнения в дифференциалах, содержащие обобщенные случайные процессы Леви: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е. Б. Розин ; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2005. – 22 с.
7. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій [і інш.]. – Дрогобич : Коло, 2011. – 129 с.
8. Вентцель, А. Д. Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель – М. : Наука. Физматлит, 1996. – 400 с.
9. *Краснов, М. Л.* Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 303 с.
10. *Лазакович, Н. В.* Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н. В. Лазакович, О. Л. Яблонский, А. К. Хмызов // Доклады НАН РБ. – 2011. – Т. 55. – № 2. – С. 5–9.
11. *Автушко, Т. С.* Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т. С. Автушко, Н. В. Лазакович, А. Ю. Русецкий // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2013. – № 2. – С. 74–79.
12. *Автушко, Т. С.* Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений высших порядков с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т. С. Автушко // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2014. – № 2. – С. 24–28.
13. *Автушко, Т. С.* Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т. С. Автушко, Н. В. Лазакович, А. Ю. Русецкий // Известия НАН Б. Сер. физ.-мат. наук. – 2013. – № 3. – С. 83–92.
14. *Розанов, Ю. А.* Случайные процессы. Краткий курс / Ю. А. Розанов. – М. : Наука, 1979. – 184 с.

6. *Rozin, Ye. B.* Uravneniya v differentsialakh, soderzhashchiye obobshchyonnye sluchaynyye protsessy Levi: avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02 / Ye. B. Rozin ; Belorus. gos. un-t. – Minsk, 2005. – 22 s.
7. Uzagalneni kvazidyferentsialny rivnyannya / R. M. Tatsiy [i insh.]. – Drogobych : Kolo, 2011. – 129 s.
8. *Ventsel, A. D.* Kurs teorii sluchaynykh protsessov / A. D. Ventsel. – M. : Nauka. Fizmatlit, 1996. – 400 s.
9. *Krasnov, M. L.* Integralnyye uravneniya / M. L. Krasnov. – M. : Nauka, 1975. – 303 s.
10. *Lazakovich, N. V.* Zadacha Koshi dlya system differentsialnykh uravneniy s obobshchyonnymi koeffitsientami v pryamom proizvedenii algebr mnemofunktsiy / N. V. Lazakovich, O. L. Yablonskiy, A. K. Khmyzov // Doklady NAN RB. – 2011. – T. 55. – № 2. – S. 5–9.
11. *Avtushko, T. S.* Lineynyye odnorodnyye differentsialnyye uravneniya vtorogo poryadka s obobshchyonnymi koeffitsientami v algebre mnemofunktsiy / T. S. Avtushko, N. V. Lazakovich, A. Yu. Rusetskiy // Vestnik BGU. Ser. 1. – 2013. – № 2. – S. 74–79.
12. *Avtushko, T. S.* Zadacha Koshi dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy vysshikh poryadkov s obobshchyonnymi koeffitsientami v algebre mnemofunktsiy / T. S. Avtushko // Vestsi BDPU. Ser. 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya. – 2014. – № 2. – S. 24–28.
13. *Avtushko, T. S.* Zadacha Koshi dlya lineynykh neodnorodnykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka s obobshchyonnymi koeffitsientami v algebre mnemofunktsiy / T. S. Avtushko, N. V. Lazakovich, A. Yu. Rusetskiy // Izvestiya NAN RB. Ser. fiz.-mat. nauk. – 2013. – № 3. – S. 83–92.
14. *Rozanov, Yu. A.* Sluchaynyye protsessy. Kratkiy kurs / Yu. A. Rozanov. – M. : Nauka, 1979. – 184 s.