УДК 517.9

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЭЙЛЕРА В ПРЯМЫХ СУММАХ НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. Л. Васильев,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций БГУ;

Н. В. Жуковская,
ассистент кафедры теории функций БГУ

Поступила в редакцию 21.03.16.

УДК 517.9

FRACTIONAL DIFFERENTIAL EULER-TYPE EQUATION IN DIRECT SUMS OF BANACH SPACES

I. Vasilyev,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of «Theory of Functions» department of BSU;

N. Zhukovskaya,
Assistant of «Theory of Functions» department of BSU

Received in 21.03.16.

Рассматривается обобщенное однородное дробно-дифференциальное уравнение эйлерова типа в прямых суммах весовых пространств аналитических функций. С использованием свойств операторов взвешенного дробного интегрирования получены условия разрешимости и явное решение рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение, дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля, операторы взвешенного дробного интегрирования

Generalized homogeneous fractional differential equation of Euler type is considered in direct sums of weighted spaces of analytical functions. With the help of properties of weighted fractional integration operator solvability conditions and explicit solution to the considered equation are obtained.

Keywords: fractional differential equation, fractional integral and Riemann–Liouville derivatives, weighted fractional integration operator.

Введение. В [1] были изучены обобщенные уравнения типа Эйлера в специально построенном банаховом пространстве функций, представимых на (0,1) в виде суммы степенного ряда с суммируемыми коэффициентами. В предлагаемой ниже работе указанные уравнения рассматриваются в прямых суммах некоторых весовых банаховых пространств, что при определенных условиях позволяет получить решения, имеющие степенные и логарифмические особенности.

1. Весовые пространства аналитических функций. Пусть X_1, X_2 – некоторые банаховы пространства функций, $X_1 \cap X_2 = 0$, $X = X_1 \oplus X_2$ – их прямая сумма. Тогда любая функция $f \in X$ единственным образом представляется в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in X_1$, $f_2 \in X_2$. Пространство X банахово с нормой $\|f\|_X = \|f_1\|_{X_1} + \|f_2\|_{X_2}$.

Введем следующие весовые пространства аналитических функций.

Определение 1. Через PS_p обозначим пространство функций, представимых в виде суммы степенного ряда:

$$\mathrm{PS}_p = \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, x \in (0,1), \{c_n\} \in l_p, 1 \le p \le +\infty \right\}.$$

Это пространство банахово с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_p} = \|\{c_n\}\|_{l_p} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

$$\|f\|_{\mathrm{PS}_\infty} = \|\{c_n\}\|_{l_\infty} = \sup_n |c_n|, \quad p = +\infty.$$

Определение 2. Через $\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\}$ обозначим весовое пространство функций вида:

$$\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\} = \left\{ f(x) = x^\mu \ln^\nu x \tilde{f}(x), \ \tilde{f}(x) \in \mathrm{PS}_p \right\}.$$

Это пространство является банаховым относительно нормы $\|f\|_{\mathrm{PS}_p\{x^\mu \ln^\nu x\}} = \|\tilde{f}\|_{\mathrm{PS}_p}$.

В этих пространствах, а также в их прямых суммах ниже будут рассмотрены обобщенные дробно-дифференциальные уравнения типа Эйлера.

2. Операторы взвешенного дробного интегрирования в $PS_p\{x^{\mu}\}$

Определение 3. Оператором взвешенного дробного интегрирования порядка α назовем оператор:

$$\left(K_+^{\alpha}\varphi\right)\left(x\right)=\frac{1}{x^{\alpha}}\left(I_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad \alpha>0.$$

Теорема 1. Оператор K_+^{α} ограничен в $PS_p\left\{x^{\mu}\right\}$, $\mu>-1$, $1\le p\le+\infty$, при этом

$$\left\|K_+^{\alpha}\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

Доказательство.

1) $$\left(K_+^{\alpha}\varphi\right)\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)x^{\alpha}}\int_0^x\frac{\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nt^n\right\}t^{\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)x^{\alpha}}\int_0^x\frac{t^{n+\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\left[\begin{array}{l}t=x\tau,\ dt=xd\tau\\ x-t=x(1-\tau)\end{array}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)x^{\alpha}}\int_0^1\frac{x^{n+\mu}\tau^{n+\mu}xd\tau}{x^{1-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=x^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}B(n+\mu+1,\alpha)x^n=$$

$$=x^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n=$$

$$=x^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n.$$

Почленное интегрирование степенного ряда возможно в силу его равномерной сходимости в интервале (0,1).

2) Имеем:

$$\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1+\mu+\alpha)}\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)},$$

следовательно, для $1\le p<+\infty$:

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^p\left|\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\right|^p\right\}^{1/p}\le$$

$$\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^p\right\}^{1/p}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}.$$

Для $p=+\infty$:

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_{PS_{\infty}\{x^{\mu}\}}=$$

$$=\sup_n\left|c_n\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\right|\le$$

$$\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\sup_n|c_n|=$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_{\infty}\{x^{\mu}\}}.$$

3) Пусть $\varphi=x^{\mu}$, следовательно

$$\left(K_+^{\alpha}\varphi\right)\left(x\right)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}x^{\mu},$$

поэтому

$$\left\|K_+^{\alpha}\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}.$$

Следствие 1. Оператор K_+^{α} ограничен в PS_p, $1\le p\le+\infty$ и при этом

$$\left\|K_+^{\alpha}\right\|_{PS_p}=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Замечание 1. Через $K_+^{\alpha}\left(PS_p(x^{\mu})\right)$ обозначим множество функций вида $K_+^{\alpha}\varphi$, где $\varphi\in PS_p(x^{\mu})$. Верно утверждение: $K_+^{\alpha}\left(PS_p(x^{\mu})\right)\ne PS_p(x^{\mu})$.

Действительно, пусть $\varphi=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)x^{\mu}$,

$f=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_nx^n\right)x^{\mu}\in PS_p(x^{\mu})$ и $K_+^{\alpha}\varphi=f$.

Тогда

$$x^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n=x^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n.$$

Отсюда

$$\left|c_n\right|=\left|\frac{\Gamma(n+\mu+1+\alpha)}{\Gamma(n+\mu+1)}g_n\right|=n^{\alpha}\left|g_n\right|\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и, вообще говоря,

$$\left\{c_n\right\}\notin l_p.$$

Теорема 2. Верно равенство:
$$\left(D_+^\alpha I_+^\alpha\right)\varphi \equiv \varphi,\quad \forall \varphi\in \mathrm{PS}_p(x^\mu).$$

Доказательство. 1) Пусть
$$0<\alpha<1,\quad \varphi = x^\mu\left(\sum_{n=0}^\infty c_n x^n\right).$$

Тогда
$$\left(D_+^\alpha I_+^\alpha\varphi\right)(x)=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right\}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^\alpha}t^{\alpha+\mu}\left\{\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}t^n\right\}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\int_0^x\frac{t^{\alpha+\mu+n}dt}{(x-t)^\alpha}=\left[t=x\tau\right]=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^{\mu+n+1}\int_0^1\tau^{\alpha+\mu+n}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}B(\alpha+\mu+n+1,1-\alpha)x^{\mu+n+1}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n\,\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\mu+n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2+\mu+n)}x^{\mu+n+1}=$$
$$=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n x^{\mu+n+1}}{(\mu+n+1)}=\sum_{n=0}^\infty c_n x^{\mu+n}=x^\mu\sum_{n=0}^\infty c_n x^n=\varphi.$$

2) Пусть $\alpha>0$ – произвольное. Тогда
$$D_+^\alpha f = D_+^{[\alpha]}\left(D_+^{\{\alpha\}}f\right).$$

Доказательство проводится аналогично.

Следствие 2. Пусть $f\in \mathrm{PS}_p(x^\mu)$. Равносильны утверждения:

1) $f=K_+^\alpha\varphi,\quad \varphi\in \mathrm{PS}_p(x^\mu)$;

2) $x^\alpha f(x)\in I_+^\alpha\left(\mathrm{PS}_p(x^\mu)\right)$.

3. Операторы взвешенного дробного интегрирования в прямых суммах весовых банаховых пространств аналитических функций

Рассмотрим $\Psi(x)$ – функцию Эйлера. Как известно [2, с.722],
$$\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$
$$\Psi'(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(k+x)^2}>0,$$
$$\Psi(x+1)=\Psi(x)+\frac{1}{x},$$
$$\Psi(1)=-C,$$

где
$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n\right)=0{,}5772156649\ldots$$
– постоянная Маскерони–Эйлера.

Положим
$$F_\alpha(x)=\Psi(x+1)-\Psi(x+1+\alpha),$$

тогда
$$F_\alpha'(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(k+x+1)^2}-\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(k+x+1+\alpha)^2}>0.$$

Следовательно, $F_\alpha(x)$ возрастает на $(0,+\infty)$. Далее имеем
$$F_\alpha(0)=\Psi(1)-\Psi(1+\alpha).$$

Пусть $n-1\le x\le n$. Тогда:
$$\Psi(n)-\Psi(n+\alpha)\le$$
$$\le\Psi(x+1)-\Psi(x+\alpha)\le$$
$$\le\Psi(n+1)-\Psi(n+1+\alpha),$$

где
$$\Psi(n+1)=\Psi(1)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$
$$\Psi(n+\alpha+1)=$$
$$=\Psi(1+\alpha)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+\alpha+1}.$$

Используя формулу [3, с. 699]
$$\sum_{k=0}^\infty\frac{\alpha}{(k+1)(k+\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha},$$

получаем:
$$F_\alpha(\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(\Psi(n+1)-\Psi(n+\alpha+1)\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\Psi(1)-\Psi(1+\alpha)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha}{(k+1)(k+\alpha+1)}\right)=$$
$$=\Psi(1)-\Psi(1+\alpha)+\frac{1}{\alpha}.$$

Пусть $0<\alpha<1$. Имеем
$$0<\Psi(1+\alpha)-\Psi(1)<\Psi(2)-\Psi(1)=1.$$

Следовательно,
$$-1<F_\alpha(0)<0,$$
$$F_\alpha(\infty)=\Psi(1)-\Psi(1+\alpha)+\frac{1}{\alpha}=F_\alpha(0)+\frac{1}{\alpha}>0.$$

Заметим, что при $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ имеем $\left|F_\alpha(\infty)\right|>\left|F_\alpha(0)\right|$ и при $\alpha\to1$, наоборот, $\left|F_\alpha(\infty)\right|<\left|F_\alpha(0)\right|$.

Пусть $M=\max\left\{\left|F_\alpha(0)\right|,\left|F_\alpha(\infty)\right|\right\}$, тогда $\left|F_\alpha(x)\right|\le M$. Верна формула [4]:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{t^{\mu}\ln t}{(x-t)^{1-\alpha}}dt =$$
$$=\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}x^{\alpha+\mu}\left(\ln x+F_{\alpha}(\mu)\right),$$
$$\mu>-1,\ \ 0<\alpha<1.$$

Теорема 3. Верно равенство:

$$\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\right)(x^{\mu}\ln x)=x^{\mu}\ln x.$$

Доказательство. 1) Пусть $0<\alpha<1$. Тогда

$$\left(D_+^{\alpha}\left(I_+^{\alpha}(x^{\mu}\ln x)\right)\right)=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{\tau^{\mu}\ln\tau\, d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\right\}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}t^{\alpha+\mu}\left(\ln t+F_{\alpha}(\mu)\right)\right\}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{t^{\alpha+\mu}\ln t}{(x-t)^{\alpha}}dt\right\}+$$
$$+\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)F_{\alpha}(\mu)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\mu)}\int_0^x\frac{t^{\alpha+\mu}dt}{(x-t)^{\alpha}}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\alpha+\mu)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)\Gamma(2-\alpha+\alpha+\mu)}\cdot$$
$$\cdot x^{1-\alpha+\mu+\alpha}\left(\ln x+F_{\alpha}(\mu+\alpha)\right)+$$
$$+\frac{d}{dx}\frac{\Gamma(1+\mu)B(\alpha+\mu+1,1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\mu)}F_{\alpha}(\mu)x^{\mu+1}=$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)}\left(\ln x+F_{\alpha}(\mu+\alpha)\right)+\frac{d}{dx}\frac{F_{\alpha}(\mu)x^{\mu+1}}{(\mu+1)}=$$
$$=x^{\mu}\left(\ln x+F_{\alpha}(\mu+\alpha)\right)+\frac{x^{\mu}}{\mu+1}+F_{\alpha}(\mu)x^{\mu}=$$
$$=x^{\mu}\ln x+x^{\mu}\left(\Psi(1+\mu+\alpha)-\Psi(2+\mu)\right)+$$
$$+\frac{x^{\mu}}{\mu+1}+x^{\mu}\left(\Psi(\mu+1)-\Psi(\alpha+\mu+1)\right)=$$
$$=x^{\mu}\ln x+x^{\mu}\left(\Psi(1+\mu+\alpha)-\Psi(\mu+1)-\frac{1}{\mu+1}\right)+$$
$$+\frac{x^{\mu}}{\mu+1}+x^{\mu}\left(\Psi(\mu+1)-\Psi(\alpha+\mu+1)\right)=x^{\mu}\ln x.$$

Теорема 4. Верно равенство:

$$\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\varphi\right)\equiv\varphi,\ \ \forall\varphi\in PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}.$$

Утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3.

Пусть

$$X=PS_p\left\{x^{\mu}\right\}\oplus PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}.$$

Теорема 5. Верно равенство:

$$\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\right)\varphi\equiv\varphi,\ \ \forall\varphi\in X.$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in X$, отсюда следует, что $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$,

где $\varphi_1\in PS_p\left\{x^{\mu}\right\}$, $\varphi_2\in PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}$.

Имеем

$$\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\right)\varphi=\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\right)\varphi_1+\left(D_+^{\alpha}I_+^{\alpha}\right)\varphi_2\equiv$$
$$\equiv\varphi_1+\varphi_2=\varphi.$$

Теорема 6. Оператор K_+^{α} ограниченно действует из $PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}$ в X. При этом

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_X\le(M+1)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}.$$

Доказательство.

$$\left(K_+^{\alpha}\varphi\right)(x)=\frac{1}{x^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\left\{\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^n\right\}t^{\mu}\ln t\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}\left(F_{\alpha}(n+\mu)+\ln x\right)x^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}F_{\alpha}(n+\mu)x^n+$$
$$+\ln x\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\alpha+1)}x^n=f_1+f_2,$$

где $f_1\in PS_p\left\{x^{\mu}\right\}$, $f_2\in PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}$.

Имеем:

$$\left\|f_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}\le\frac{M\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}},$$
$$\left\|f_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}.$$

Следовательно,

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_X\le\frac{(M+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}.$$

Теорема 7. Оператор K_+^{α} ограничен в X, при этом

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_X \le \frac{(M+2)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_X .$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,$$

$$\varphi_1\in PS_p\left\{x^{\mu}\right\},$$

$$\varphi_2\in PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}.$$

$$K_+^{\alpha}\varphi=K_+^{\alpha}\varphi_1+K_+^{\alpha}\varphi_2,$$

$$K_+^{\alpha}\varphi_1=f_1\in PS_p\left\{x^{\mu}\right\},$$

$$\left\|f_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}},$$

$$K_+^{\alpha}\varphi_2=f_2+f_3,$$

$$f_2\in PS_p\left\{x^{\mu}\right\},$$

$$f_3\in PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\},$$

$$\left\|f_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}\le\frac{M\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}},$$

$$\left\|f_3\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}.$$

Имеем:

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_X=\left\|K_+^{\alpha}(\varphi_1+\varphi_2)\right\|_X=\left\|f_1+f_2+f_3\right\|_X=$$

$$=\left\|f_1+f_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}+\left\|f_3\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}\le$$

$$\le\left\|f_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}+\left\|f_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}+\left\|f_3\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}\le$$

$$\le\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}+$$

$$+\frac{M\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}+$$

$$+\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}.$$

Имеем:

$$\begin{cases}\|\varphi\|_X=\left\|\varphi_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}+\left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}},\\ \left\|\varphi_1\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\}}\le\|\varphi\|_X,\\ \left\|\varphi_2\right\|_{PS_p\{x^{\mu}\ln x\}}\le\|\varphi\|_X.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\left\|K_+^{\alpha}\varphi\right\|_X \le \frac{(M+2)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}\|\varphi\|_X .$$

Замечание 2. Через $K_+^{\alpha}(X)$ обозначим множество функций вида $K_+^{\alpha}\varphi$, где $\varphi\in X$. Верно утверждение: $K_+^{\alpha}(X)\ne X$.

Проверяется непосредственно тем же способом, что и замечание 1.

4. Дробно-дифференциальное уравнение типа Эйлера

Рассмотренные в [1] уравнения в силу постановки задачи допускали только аналитические решения. Между тем, при выполнении некоторых условий можно получить решения, имеющие степенные и логарифмические особенности. Для выяснения существа вопроса достаточно рассмотреть однородное дробно-дифференциальное уравнение с тремя производными вида:

$$x^{\alpha+2}(D_+^{\alpha+2}y)(x)+Ax^{\alpha+1}(D_+^{\alpha+1}y)(x)+$$
$$+Bx^{\alpha}(D_+^{\alpha}y)(x)=0, \qquad (1)$$

где $0<\alpha<1$, $A, B\in\mathbb{C}$ – постоянные коэффициенты. Полагая $u=D_+^{\alpha+2}y$, представим (1) в виде:

$$u(x)+A\left(K_+^1u\right)(x)+B\left(K_+^2u\right)(x)=0,$$

или в развернутой форме:

$$u(x)+\frac{A}{x}\int_0^x u(t)dt+\frac{B}{x^2}\int_0^x(x-t)u(t)dt. \qquad (2)$$

Будем искать решение (2) в пространстве $X=PS_p\left\{x^{\mu}\right\}\oplus PS_p\left\{x^{\mu}\ln x\right\}$,

где $\mu>\alpha-1$.

Положим:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\mu+n}+\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{\mu+n}\ln x.$$

Непосредственно вычисляются интегралы:

$$\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\mu+n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nx^{\mu+n}}{\mu+n+1},$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(d_nt^{\mu+n}\right)\ln t\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_nx^{\mu+n}}{\mu+n+1}\left(\ln x+F_1(\mu+n)\right),$$

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x(x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\mu+n}\right)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_nx^{\mu+n}}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)},$$

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x (x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^{\mu+n}\right)\ln t\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n x^{\mu+n}}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)}\left(\ln x+\mathrm{F}_2(\mu+n)\right),$$

где

$$\mathrm{F}_1(\mu+n)=\Psi(\mu+n+1)-\Psi(\mu+n+2);$$

$$\mathrm{F}_2(\mu+n)=\Psi(\mu+n+1)-\Psi(\mu+n+3).$$

Подставляя эти значения в (2), для коэффициентов c_n, d_n получим уравнения:

$$c_n\left(1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+n+1}+\frac{\mathrm{B}}{\mu+n+1}\right)+$$

$$+d_n\left(\ln x+\frac{\mathrm{A}\ln x}{\mu+n+1}+\frac{\mathrm{A}}{\mu+n+1}\mathrm{F}_1(\mu+n)\right)+$$

$$+\mathrm{B}\,d_n\left(\frac{1}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)}\ln x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\mu+n+2)(\mu+n+1)}\mathrm{F}_2(\mu+n)\right)=0,$$

n = 0, 1, 2.

Здесь множители при c_n, d_n зависят от суммы $\mu + n$ таким образом, что при уменьшении n увеличивается μ, и наоборот. Конечное выражение для $u(x)$ при этом не изменяется. Полагая минимально возможное значение n = 0, отсюда получим:

$$c_0\left\{1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\}+$$

$$+\,d_0\left\{1+\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\frac{\mathrm{B}}{(\mu+1)(\mu+2)}\right\}\ln x+ \qquad (3)$$

$$+\,d_0\left(\mathrm{F}_2(\mu)\frac{\mathrm{B}}{(\mu+2)(\mu+1)}+\mathrm{F}_1(\mu)\frac{\mathrm{A}}{\mu+1}\right)=0.$$

Чтобы в (3) существовало решение $c_0\neq 0$, $d_n\neq 0$, необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{\mathrm{A}}{\mu+1}+\dfrac{\mathrm{B}}{(\mu+2)(\mu+1)}=0, & (4)\\[2mm] \mathrm{F}_2(\mu)\dfrac{\mathrm{B}}{(\mu+2)(\mu+1)}+\mathrm{F}_1(\mu)\dfrac{\mathrm{A}}{\mu+1}=0, & (5)\end{cases}$$

где

$$\begin{cases}\mathrm{F}_1(\mu)=\Psi(\mu+1)-\Psi(\mu+2)=-\dfrac{1}{\mu+1},\\ \mathrm{F}_2(\mu)=\Psi(\mu+1)-\Psi(\mu+3)=\\ =-\dfrac{1}{\mu+1}-\dfrac{1}{\mu+2}=-\dfrac{2\mu+3}{(\mu+1)(\mu+2)}.\end{cases}$$

Отсюда находим

$$\mathrm{A}=-2\mu-3,\ \ \mathrm{B}=(\mu+2)^2.$$

Подставляя это в (4), получим

$$\left(\mu+\frac{\mathrm{A}+3}{2}\right)^2=0,$$

откуда $\mu=-\dfrac{\mathrm{A}+3}{2}.$

При этом равенство (5) также верно.

При $n>0$ имеем $c_n=d_n=0$.

Уравнение (4) играет роль характеристического. Таким образом, если характеристическое уравнение (4) имеет 1 корень кратности 2 и $-\dfrac{\mathrm{A}+3}{2}>\alpha-1$, то уравнение (2) имеет в X решение:

$$u(x)=c_0x^{-\frac{\mathrm{A}+3}{2}}+d_0x^{-\frac{\mathrm{A}+3}{2}}\ln x, \qquad (6)$$

где c_0, d_0 – произвольные постоянные.

Если характеристическое уравнение (4) имеет 2 простых корня μ_1 и μ_2, то равенство (5) не верно и $d_0=0$. Тогда уравнение (2) имеет решение:

$$u(x)=c_{01}x^{\mu_1}+c_{02}x^{\mu_2}, \qquad (7)$$

где константы c_{01}, c_{02} выбираются произвольно. Очевидно в этом случае

$$u(x)\in \mathrm{PS}_p\left\{x^{\mu_1}\right\}\oplus \mathrm{PS}_p\left\{x^{\mu_2}\right\}. \qquad (8)$$

Для нахождения решения уравнения (1) получаем уравнение $\mathrm{D}_+^{\alpha+2}y=u$.

При условии $\mu>\alpha-1$ имеем из (6):

$$y(x)=\gamma\, x^{\mu+2}+\delta\, x^{\mu+2}\ln x.$$

В случае различных корней характеристического уравнения из (7) получаем:

$$y(x)=\gamma\, x^{\mu_1+2}+\delta\, x^{\mu_2+2},$$

где γ, δ – произвольные постоянные.

Общий случай дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера с любым числом производных произвольного порядка, в том числе и неоднородного, рассматривается аналогично.

Заключение. В предлагаемой работе изучены операторы взвешенного дробного интегрирования в прямых суммах весовых пространств аналитических функций. Эти результаты используются для решения дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера. Показано, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, исходное уравнение допускает решение с логарифмическими особенностями.

Литература

1. *Васильев, И. Л.* Обобщенное уравнение типа Эйлера с конечным числом производных / И. Л. Васильев, Н. В. Жуковская // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія, геаграфія. – 2015. – № 2. – С. 21–23.
2. *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Физматлит, 2003.
3. *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981.
4. *Жуковская, Н. В.* Применение метода эрмитовых форм к исследованию однородного дифференциального уравнения Эйлерова типа на отрезке / Н. В. Жуковская // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія, геаграфія. – 2015. – № 2. – С. 24–27.

References

1. *Vasilyev, I. L.* Obobshchyonnoye uravneniye tipa Eylera s konechnym chislom proizvodnykh / I. L. Vasilyev, N. V. Zhukovskaya // Vestsi BDPU. Ser. 3. Fizika, matematyka, infarmatyka, biyalogiya, geagrafiya. – 2015. – № 2. – S. 21–23.
2. *Prudnikov, A. P.* Integraly i ryady. T. 2. Spetsialnyye funktsii / A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – M. : Fizmatlit, 2003.
3. *Prudnikov, A. P.* Integraly i ryady. T. 1. Elementarnyye funktsii / A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. – M. : Nauka, 1981.
4. *Zhukovskaya, N. V.* Primeneniye metoda ermitovykh form k issledovaniyu odnorodnogo differentsialnogo uravneniya Eylerova tipa na otrezke / N. V. Zhukovskaya // Vesti BDPU. Ser. 3. Fizika, matematyka, infarmatyka, biyalogiya, geagrafiya. – 2015. – № 2. – S. 24–27.