МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2016. № 2. С. 12–15

УДК 517.926.4

АБ КВАТЭРНІЁННЫХ МАНАГЕННЫХ У СЭНСЕ У. С. ФЁДАРАВА ФУНКЦЫЯХ ЧАТЫРОХ РЭЧАІСНЫХ ЗМЕННЫХ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, выкладчык філіяла БДУІР МРК;
І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі БДПУ

Паступіў у рэдакцыю 03.03.16.

UDC 517.926.4

ON QUATERNION MONOGENIC U. S. FYODOROV' FUNCTIONS OF FOUR REAL VARIABLES

U. Shylinets,
Candidate of Physics and Mathematics, Teacher of the branch of BSUIR MRC;
I. Gulo,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics BSPU

Received in 03.03.16.

Пабудаваны аналаг формулы Кашы для кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцый, пры дапамозе якога рэшана краявая задача.

Ключавыя словы: F-манагенныя функцыі, кватэрніённая функцыя, краявая задача.

The article provides the analogue of the Cauchy formula for quaternion F-monogenic functions. Using this analogue, the author solves a boundary value problem for quaternion functions.

Keywords: F-monogenic functions, quaternion function, boundary-value problem.

Уводзіны. У. А. Гусеў у працы [1] вывучаў кватэрніённыя манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі [2] на плоскасці. У працах [3–6] даследаваліся F-манагенныя кватэрніённыя функцыі трох і чатырох рэчаісных зменных.

У дадзенай працы даследуюцца F-манагенныя кватэрніённыя функцыі, адрозныя ад раней разгледжаных. Для гэтых кватэрніённых функцый атрымана інтэгральнае выяўленне і рэшана краявая задача.

Асноўная частка. Няхай D – аднազвязны абсяг чатырохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^3(t,x,y,z)$.

Разгледзім кватэрніённыя функцыі выгляду

$$f = f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + \\ + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k,$$

$$p = \lambda_1 t + \lambda_2 xi + \lambda_3 yj + \lambda_4 zk,$$

дзе f_1, f_2, f_3, f_4 – рэчаісныя функцыі класа $C^1(D)$, $1, i, j, k$ – базіс алгебры кватэрніёнаў ($i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$), λ_n (n = 1, 2, 3, 4)– такія рэчаісныя лікі, што $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \lambda_1^2$.

Для любых пунктаў

$$M(t,x,y,z) \text{ і } M'(t',x',y',z')$$

абсягу D мяркуем

$$\Delta f = f(M') - f(M), \ \Delta p = p(M') - p(M).$$

Азначэнне. Кватэрніённая функцыя f называецца манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагеннай) [2] па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, калі існуе такая кватэрніённая функцыя

$$\theta = \theta_1(t,x,y,z) + \theta_2(t,x,y,z)i + \\ + \theta_3(t,x,y,z)j + \theta_4(t,x,y,z)k$$

($\theta_i(t,x,y,z)$ (i = 1, 2, 3, 4) – аднназначныя рэчаісныя функцыі пункта (t,x,y,z) абсягу D), што для любога фіксаванага пункта $M \in D$ і любога зменнага пункта $M' \in D$ маем

$$\Delta f = \Delta p\theta(M) + \alpha(M,M'),$$

дзе $\frac{\alpha(M,M')}{\rho} \to 0$ пры $\rho \to 0$, $\rho = \left|\overline{MM'}\right|$.

Лёгка паказаць, што калі функцыя f – F-манагенная па функцыі p у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$$

і пры гэтым

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\theta, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Абазначым функцыю θ праз $\frac{\partial f}{\partial p}$. Тады роўнасці (1) можна запісаць у выглядзе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p}. \end{aligned} \tag{1'}$$

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай V – чатырохмерны абмежаваны абсяг з граніцай σ ($\sigma \subset D, V \subset D$). Мяркуем далей, што p і функцыя f, F-манагенная па p, вызначаны на замкнутай трохмернай паверхні σ, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу V значэнне функцыі f, F-манагеннай па p, калі вядомы яе значэнні на паверхні σ.

Для функцыі

$$\begin{aligned} f = {} & f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + \\ & + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k \end{aligned}$$

і адвольнага пункта $M(x_0,y_0,z_0) \notin \sigma$ лічым [7]:

$$\begin{aligned} I_\sigma = \int_\sigma \Bigg\{ & \alpha_1\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \\ & + \alpha_2\left(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \alpha_3\left(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \\ & + \alpha_4\left(\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Bigg\} f d\sigma, \end{aligned} \tag{2}$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні σ у яе бягучым пункце $P(t,x,y,z)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (t-t_0)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^4}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^4},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r^4}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{t-t_0}{r^4}.$$

Няхай M – любы дадзены пункт абсягу D, $M \notin \bar{V}$.

Тэарэма 1. Для любой кватэрніённай функцыі f, F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, маем $I_\sigma = 0$, дзе I_σ вызначаецца роўнасцю (2).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымоўваем

$$\begin{aligned} I_\sigma = \int_V \{ & \frac{\partial}{\partial t}((\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z})f) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}((\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})f) + \frac{\partial}{\partial y}((\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})f) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}((\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})f)\} dV = \\ = \int_V \{ & (\lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \lambda_2 i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} - \lambda_3 j\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} - \lambda_4 k\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t})f + \\ & + (\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + (\lambda_2 i\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} + \lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2})f + (\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})\frac{\partial f}{\partial x} + \\ & + (\lambda_3 j\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y} + \lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2})f + (\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y} + \\ & + (\lambda_4 k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial z} + \lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2})f + (\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}\} dV = \end{aligned}$$

$$= \int\limits_V \{\lambda_1(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2})f +$$
$$+(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial t}+$$
$$+(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})\frac{\partial f}{\partial x}+(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y}+$$
$$+(\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}\}dV.$$

Адсюль і з умоў (1') F-манагеннасці функцыі f па функцыі p у абсягу D, паколькі

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

атрымоўваем

$$I_\sigma = \int\limits_V \{(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_1\frac{\partial f}{\partial p}+$$
$$+(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})\lambda_2 i\frac{\partial f}{\partial p}+(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\lambda_3 j\frac{\partial f}{\partial p}+$$
$$+(\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_4 k\frac{\partial f}{\partial p}\}dV=$$
$$= \int\limits_V \{(\lambda_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\lambda_2\lambda_1 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_3\lambda_1 j\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_4\lambda_1 k\frac{\partial\varphi}{\partial y}-$$
$$-\lambda_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_3^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_4^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+\lambda_1\lambda_4 k\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial p}\}dV=$$
$$= \int\limits_V \{(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_4^2)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\}dV=0.$$

Тэарэма 2. Калі кватэрніённая функцыя f з'яўляецца F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, то для любога пункта M, які ляжыць унутры V, маем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2\lambda_1}\int\limits_\sigma \{(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_1+$$
$$+(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})\lambda_2 i+(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\lambda_3 j+$$
$$+(\alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_4 k\}fd\sigma.$$

Доказ. Няхай σ_1 – сфера з цэнтрам у пункце $M(t_0,x_0,y_0,z_0)$, якая размешчана ўнутры σ. Калі l – радыус сферы σ_1, то маем

$$I_{\sigma_1} = \int\limits_{\sigma_1}\{(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3\lambda_3 j+\alpha_4\lambda_4 k)\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+(\alpha_2\lambda_1-\alpha_1\lambda_2 i)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\alpha_3\lambda_1-\alpha_1\lambda_3 j)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+$$
$$+(\alpha_4\lambda_1-\alpha_1\lambda_4 k)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}fd\sigma_1=$$
$$=\int\limits_{\sigma_1}\{(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3\lambda_3 j+\alpha_4\lambda_4 k)\frac{t-t_0}{l^4}+ \qquad (3)$$
$$+(\alpha_2\lambda_1-\alpha_1\lambda_2 i)\frac{x-x_0}{l^4}+(\alpha_3\lambda_1-\alpha_1\lambda_3 j)\frac{y-y_0}{l^4}+$$
$$+(\alpha_4\lambda_1-\alpha_1\lambda_4 k)\frac{z-z_0}{l^4}\}fd\sigma_1=$$
$$=\int\limits_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2\lambda_1+\alpha_1\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_1\alpha_3\lambda_3 j+\alpha_4\alpha_1\lambda_4 k+\alpha_2^2\lambda_1-$$
$$-\alpha_1\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3^2\lambda_1-\alpha_1\alpha_3\lambda_3 j+\alpha_4^2\lambda_1-\alpha_1\alpha_4\lambda_4 k)\}fd\sigma_1=$$
$$=\int\limits_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\lambda_1\}fd\sigma_1.$$

Вядома, што $\sum\limits_{k=1}^{4}\alpha_k^2=1$, $d\sigma_1=l^3 d\omega$ ($d\omega$ – элемент адзінкавай сферы).

З роўнасці (3) атрымаем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2\lambda_1}I_{\sigma_1}. \qquad (4)$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1}=I_\sigma$.

Тады з роўнасці (4) маем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2\lambda_1}\int\limits_\sigma \{(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_1+$$
$$+(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x})\lambda_2 i+(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\lambda_3 j+ \qquad (5)$$
$$+(\alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_4 k\}fd\sigma.$$

Заключэнне. Пры дапамозе інтэгральнага выяўлення (5) і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Літаратура

1. *Гусев, В. А.* О кватернионных функциях, моногенных в смысле В. С. Федорова / В. А. Гусев // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20. – Вып. 1(121). – С. 203–208.
2. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
3. *Стэльмашук, М. Т.* Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых F-манагенных функцый аднаго класа / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 2. – С. 8–10.
4. *Стэльмашук, М. Т.* Рашэнне краявой задачы для кватэрніённых функцый чатырох рэчаісных зменных / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. Ф. Падабед // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2006. – № 1. – С. 12–14.
5. *Стэльмашук, М. Т.* Аб кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцыях / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. А. Андрэева // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2010. – № 1. – С. 11–13.
6. *Шылінец, У. А.* Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава функцый трох рэчаісных зменных / У. А. Шылінец, Г. А. Скрабец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2013. – № 4. – С. 10–12.
7. *Федоров, В. С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1.– С. 227–233.

References

1. *Gusev, V. A.* O kvaternionnykh funktsiyakh, monogennykh v smysle V. S. Fyodorova / V. A. Gusev // Uspekhi matematicheskikh nauk. – 1965. – T. 20. – Vyp. 1(121). – S. 203–208.
2. *Fyodorov, V. S.* Osnovnyye svoystva obobshchyonnykh monogennykh funktsiy / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958. – № 6. – S. 257–265.
3. *Stelmashuk, M. T.* Ab integralnym vyyaulenni kvaterniyonnykh F-managennykh funktsyi adnago klasa / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2005. – № 2. – S. 8–10.
4. *Stelmashuk, M. T.* Rashenne krayavoy zadachy dlya kvaterniyonnykh funktsyi chatyrokh rechaisnykh zmennykh / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, G. F. Padabed // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2006. – № 1. – S. 12–14.
5. *Stelmashuk, M. T.* Ab kvaterniyonnykh managennykh u sense U. S. Fyodarava funktsyyakh / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, G. A. Andreyeva // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2010. – № 1. – S. 11–13.
6. *Shylinets, U. A.* Ab integralnym vyyaulenni kvaterniyonnykh managennykh u sense U. S. Fyodarava funktsyi trokh rechaisnykh zmennykh / U. A. Shylinets, G. A. Skrabets // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2013. – № 4. – S. 10–12.
7. *Fyodorov, V. S.* Ob odnom obobshchenii integral tipa Koshi v mnogomernom prostranstve / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1957. – № 1. – S. 227–233.