УДК 517.9

О.Н. Малышева, *ассистент кафедры высшей математики БГУИР*
Н.П. Сачок, *студент ФКС и С БГУИР*

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С ЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ И ФУНКЦИЕЙ ТРЕНИЯ – МНОГОЧЛЕНОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Введение. История развития качественной теории нелинейных колебаний начинается в 1877 г., когда Рэлей (Rayleigh) получил уравнение нелинейных колебаний, содержащее предельный цикл для вибрации струны. Далее, в 1927 г. Ван-дер-Поль получил уравнение нелинейных колебаний в автоколебательном контуре на основе LC-контура и триода. В 1928 г. французским инженером Льенаром была получена система уравнений, характеризующих определенный тип нелинейных автоколебаний, для которой мы проводим оценку числа предельных циклов методом Дюлака. Впервые анализ нелинейных колебаний с использованием фазовой плоскости был применен Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым в начале XX в. По данной тематике опубликовано большое количество работ физиками и математиками, основоположником качественной теории является А. Пуанкаре.

Несмотря на успехи качественной теории автономных систем на плоскости, многие ее проблемы остаются нерешенными. Например, 16-ая проблема Гильберта о максимальном числе предельных циклов полиномиальной системы и их взаимном расположении в зависимости от степени правых частей уравнений. Проблему Гильберта, по-видимому, следует считать полностью решенной, если имеется не только глобальная оценка числа предельных циклов, но разработаны также и конструктивные методы получения точной оценки предельных циклов индивидуальной системы.

Актуальность исследования заключается в том, что многим приложениям требуется быстрая и несложная оценка предельных циклов. Особенно эффективно такая оценка может быть получена при комбинировании метода вспомогательных функций Дюлака-Черкаса и построении функции предельных циклов Андронова-Хопфа.

Целью работы является построение точной оценки числа предельных циклов двух однопараметрических семейств систем Льенара с линейной восстанавливающей функцией и функцией трения – многочленом четвертой степени. Также в работе находятся области постоянного числа предельных циклов для семейств систем Льенара с двумя параметрами.

Точная оценка числа предельных циклов при помощи построения функции Дюлака-Черкаса

1.1 Построение функции Дюлака-Черкаса. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \frac{dy}{dy} = Q(x,y), \qquad (1)$$

где $P(x,y), Q(x,y)$ – непрерывно-дифференцируемые функции в области $\Omega \subset R^2$. Сформулируем критерий Дюлака [1, с. 113–118].

Пусть $B(x,y)$ – некоторая однозначная и дифференцируемая функция в Ω, где функция

$$F(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\big(B(x,y)P(x,y)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(B(x,y)Q(x,y)\big)$$

знакопостоянна $(F(x,y) \geq 0, (x,y) \in \Omega)$ и не равна нулю тождественно в любой области $G \subset \Omega$, ограниченной произвольными траекториями системы (2). Тогда:

- если Ω – односвязная область, то в ней не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий системы (2) (в таком случае нет предельных и сепаратрисных циклов);
- если Ω – двусвязная область, то в ней не может быть более одного замкнутого контура, составленного из траекторий системы (2) (в том числе, не более одного предельного цикла).

Функцию Дюлака $B(x,y)$, определенную в таком классическом смысле, используют при доказательстве отсутствия предельных циклов полиномиальных систем (2) в односвязной области, а также для доказательства единственности предельного цикла в двух двусвязной области [2, с. 779–801].

Однако регулярных методов нахождения такой функции $B(x,y)$, удовлетворяющей всем требованиям критерия Дюлака и соответствующей данной динамической системе, не существует. В каждом конкретном случае успех подбора функции Дюлака зависит от вида исследуемой системы и опыта подбирающего.

Определение 1. [3, с. 689–699] *Функция* $\Psi(x,y)$ *называется функцией Дюлака-Черкаса для системы (1) в области* $\Omega \subset R^2$, *если существует такое* $k \in R, k \neq 0$, *что справедливо неравенство*

$$\Phi = k\Psi div(X) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0(<0), \forall (x,y) \in \Omega,$$

где $X = (P,Q)$.

Если функция $\Psi(x,y)$ является функцией Дюлака-Черкаса, то функция $B(x,y) = |\Psi(x,y)|^{\frac{1}{k}}$ является функцией Дюлака в классическом смысле в каждой из областей $\Psi > 0, \Psi < 0$.

Теорема 1. [3, с. 689–699] Пусть в односвязной области $\Omega \subset R^2$ система (1) имеет единственную особую точку антиседло A, $divf(A) \neq 0$, $f = (P,Q)$. Пусть также функция $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$ при некоторых значениях $k \in R$, $k < 0$ удовлетворяет условию

$$\Phi = k\Psi divf + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0, \ (x,y) \in \Omega, \quad (2)$$

при этом уравнение $\Psi(x,y) = 0$ определяет гнездо из m вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из $m-1$ двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом в области Ω она имеет не более m предельных циклов. Причем существующие предельные циклы являются грубыми, а тип устойчивости каждого из них определяется знаком $k\Psi$ в подобласти его локализации.

Функцию $\Psi(x,y)$ удобно искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций, то есть

$$\Psi = \Psi(x,y,C) = \sum_{j=1}^{m} C_j \Psi_j(x,y), C_j = const, C = (C_1,\ldots,C_m). \quad (3)$$

Тогда функция Φ также является аналогичной линейной комбинацией известных функций

$$\Phi = \Phi(x,y,C) = \sum_{j=1}^{m} C_j \Phi_j(x,y). \quad (4)$$

Существование линейной комбинации (3), удовлетворяющей неравенству (4) при заданном значении k, в случае замкнутой ограниченной области Ω эквивалентно неравенству

$$L = \max_{|C_j| \le 1} \min_{(x,y)\in\Omega} \Phi(x,y,C) > 0. \quad (5)$$

Линейная зависимость функции Φ от дополнительных переменных $C_j, j = 1,\ldots,m$, позволяет находить максимин (5) с помощью решения соответствующей задачи линейного программирования [4, с. 29–38]

$$L \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x_i,y_i) \ge 0, \quad |C_j| \le 1, \quad (6)$$

на сетке узлов $(x_i,y_i), i = 1,\ldots,N_0$, взятой в области Ω.

Для системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (7)$$

$F'(x) = f(x)$, использование функции Ψ позволяет свести задачу оценки числа предельных циклов к нахождению положительной функции одной переменной [4, с. 29–38] в случае отсутствия кратных предельных циклов.

Теорема 2. Для системы (7) существует функция

$$\Psi(x,y,C) = \Psi_1(x,C)y^{n-1} + \Psi_2(x,C)y^{n-2} + \ldots + \Psi_n(x,C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \tilde{\Psi}(x,y),$$

$C = (C_1,C_2,\ldots,C_n)$, что соответствующая функция Φ из (4)

$$\Phi = k\Psi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q = k\Psi(-f) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}(y-F) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(-g) = \Phi(x,C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x).$$

По теореме 1, если существуют такие значения постоянных $C_j = C_j^*$, что построенная функция $\Phi(x,C^*)$

$$\Phi(x,C^*) = \sum_{j=1}^{n} C_j^* \Phi_j(x) > 0, \quad \forall x \in [p,q],$$

то в полосе $p \le x \le q, y \in R$ система Льенара (7) имеет не более m предельных циклов, где m – число овалов кривой $\Psi(x,y,C^*) = 0$, расположенных в полосе, но гарантированно имеет $m-1$ предельных циклов в кольцах между соседними овалами. Но задача выбора положительной функции $\Phi(x,C^*)$ среди линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x), \Phi_j(x)$ – известные функции сводятся к решению задачи оптимизации

$$L \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x) \ge L, |C_j| \le 1. \qquad (8)$$

Ее решение $(C^*, L^*), C^* = (C_1^*, ..., C_n^*)$ означает, что

$$\max_{|C_j| \le 1} \min_{p \le x \le q} \Phi(x, C) = L^*$$

достигается при $C = C^*$.

Задача (8) решается приближенно. Действительно, возьмем на $[p,q]$ сетку узлов $x_i \in [p,q]$, $i = 1,...,N_0$, можно равномерную, и вместо задачи (8) рассмотрим сеточную задачу

$$L \to max, \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(x_i) \ge L, |C_j| \le 1, i = 1,...,N_0. \qquad (9)$$

Задача (9) является задачей линейного программирования и легко сводится к стандартной задаче линейного программирования. Выбор сетки узлов, числа $k < 0$ и числа n производится опытным путем.

1.2. Оценка числа предельных циклов систем Льенара с параметром. Построение функции Андронова-Хопфа

Определение 2. *Поверхностью предельных циклов системы*

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,a), \qquad (10)$$
$$(x,y) \in \Omega, a \in R$$

называется множество точек пространства $R^2 \times R$

$$SLC = \{(x,y,a) : (x,y) \in L(a), a \in R\},$$

где $L(a)$ – множество на фазовой плоскости R^2, образованное предельными циклами системы (10) при данном значении a.

Определение 3. *Параметр a поворачивает векторное поле системы (10) в R^2, если справедливо равенство*

$$(P)_a' Q - P(Q)_a' \ge 0 (\le 0),$$

которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (10), принадлежащим множеству $L(a)$.

Замечание 1. Условие в определении 3 означает, что предельные циклы системы (10) при изменении параметра a изменяют свое положение, но при этом не пересекаются при различных значениях параметра. Множество $L(a), a \in R$, образует некоторую открытую область $G \subset R^2$, на которой вышесказанное позволяет ввести функцию предельных циклов (функцию Андронова-Хопфа).

Определение 4. *Функцией предельных циклов системы (10) называется функция $p(x,y), (x,y) \in G$, принимающая значение a на множестве $L(a)$ при данном значении a, G – открытая область, образованная множеством $L(a)$ при $a \in R$.*

Замечание 2. В случае, если параметр a поворачивает векторное поле системы (10), поверхность предельных циклов определяется уравнением $p(x,y) = a, a \in R$, и функцию предельных циклов можно дополнить точкой $(x_0, y_0, p(x_0, y_0))$, соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа.

Если предельные циклы, окружающие особую точку $O(0,0)$, при $P(0,0,a) = Q(0,0,a) = 0$, пересекают полуось $y = 0, x > 0$ лишь в одной точке, то вместо функции $p(x,y)$ удобно рассматривать функцию $AH(x) = p(x,0)$ [5], которая дает полную информацию о предельных циклах системы (11) и их бифуркациях при изменении a.

С помощью численных методов продолжением по параметру можно построить приближенные функции предельных циклов $AH(x)$ для систем Льенара.

Апробация метода Дюлака-Черкаса

2.1 Оценка числа предельных циклов однопараметрических семейств систем Льенара. Для ряда семейств систем Льенара нами были проведены многочисленные исследования числа предельных циклов методом Дюлака-Черкаса, а также приближенно построены функции предельных циклов Андронова-Хопфа. Для этого соответствующие программы были разработаны в пакете «Mathematica». На основании полученных результатов сформулируем ряд теорем.

Теорема 3. *Система*

$$\frac{dx}{dt}=y-(-x^5+3x^3-ax),\frac{dy}{dt}=-x \qquad (11)$$

1) *при* $a=1.98$ *имеет точно два предельных цикла;*
2) *при* $a=1.9953$ *предельных циклов не имеет.*

Доказательство. 1. Для системы (11) построена функция Дюлака при $n=19$, $k=-1$ на сетке узлов $x_i\in[p,q]$, $p=-1.5$, $q=1.5$, $N_0=500$. Получено решение $C^*,L^*\approx 0.00047$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x,C)/(1+x^{24})$. Уравнение $\Psi(x,y,C^*)=0$ определяет в полосе $p\le x\le q$ два овала, предельные циклы попадают в области, описанные в теореме 1. На рисунке овалы уравнения – это границы темных областей.

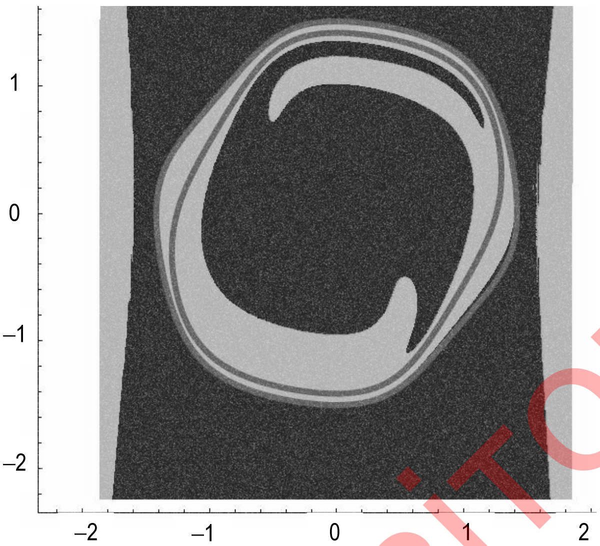

Рисунок 1 – Овалы уравнения $\Psi\left(x,y,C^*\right)=0$ *и предельные циклы системы (11)*

2. Для системы (11) построена функция Дюлака при $n=19$, $k=-1$ на сетке узлов $x_i\in[p,q]$, $p=-1.5$, $q=1.5$, $N_0=500$. Получено решение $C^*,L^*\approx 0.00023$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x,C)/(1+x^{24})$. Уравнение $\Psi(x,y,C^*)=0$ определяет в полосе $p\le x\le q$ единственный овал, что свидетельствует об отсутствии предельных циклов, так как единственное положение равновесия $O(0,0)$ является устойчивым, а бесконечность притягивает траектории.

С помощью метода продолжения по параметру численными методами нами приближенно построена функция предельных циклов Андронова–Хопфа. Результаты, изложенные в теореме 3, согласуются с построенной функцией.

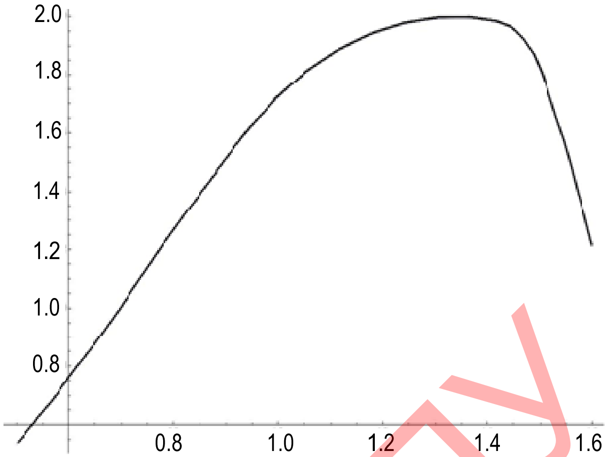

Рисунок 2 – Приближенно построенная функция предельных циклов $a=AH(x)$ *системы (11)*

Теорема 4. *Система*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y-(-x^5+3x^3+\frac{x^2}{2}-ax),\\ \frac{dy}{dt}&=-x\end{aligned} \qquad (12)$$

1) *при* $a=1.7646$ *имеет точно два предельных цикла;*
2) *при* $a=1.7783$ *предельных циклов не имеет.*

Доказательство. 1) Для системы (12) построена функция Дюлака при $n=11$, $k=-1$ на сетке узлов $x_i\in[p,q]$, $p=-1.5$, $q=1.5$, $N_0=500$. Получено решение $C^*,L^*\approx 1.59\cdot 10^{-14}$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x,C)/(1+x^{24})$. Уравнение $\Psi(x,y,C^*)=0$ определяет в полосе $p\le x\le q$ два овала, предельные циклы попадают в области, описанные в теореме 1.

2) Для системы (12) построена функция Дюлака при $n=7$, $k=1/2$ на сетке узлов $x_i\in[p,q]$, $p=-1.5$, $q=1.5$, $N_0=500$. Получено решение $C^*,L^*\approx 10^{-21}$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x,C)/(1+x^6)$. Уравнение $\Psi(x,y,C^*)=0$ определяет в полосе $p\le x\le q$ единственный овал, что свидетельствует об отсутствии предельных циклов, так как единственное положение равновесия $O(0,0)$ является устойчивым, а бесконечность притягивает траектории.

С помощью метода продолжения по параметру численными методами нами приближенно построена функция предельных циклов, которая подтверждает справедливость результатов, изложенных в теореме 4.

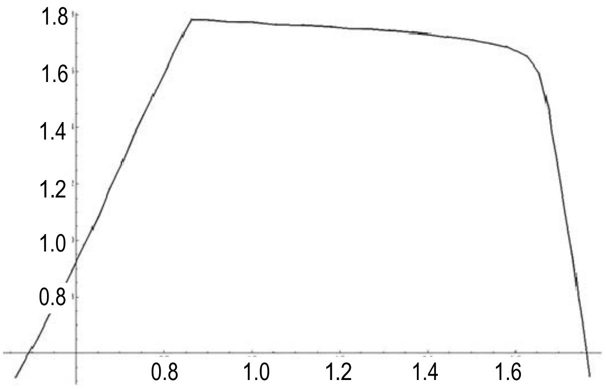

Рисунок 3 – Приближенно построенная функция предельных циклов $a = AH(x)$ системы (12)

Теорема 5. [6, с.171–185] *Система*

$$\frac{dx}{dt} = y - (-x^5 + ax^3 - x), \quad \frac{dy}{dt} = -x \qquad (13)$$

при $a = 2.17$ *имеет точно два предельных цикла.*

Следующая теорема значительно улучшает результат, изложенный в теореме 5.

Теорема 6. *Система (13)*

1) *при* $a = 2.118$ *имеет точно два предельных цикла;*
2) *при* $a = 2.113$ *предельных циклов не имеет.*

Доказательство. 1. Для системы (13) построена функция Дюлака при $n = 17$, $k = -1$ на сетке узлов $x_i \in [p, q]$, $p = -1.5$, $q = 1.5$, $N_0 = 500$. Получено решение $C^*, L^* \approx 3.5 \cdot 10^{-15}$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x, C)/(1 + x^8)$. Уравнение $\Psi(x, y, C^*) = 0$ определяет в полосе $p \le x \le q$ два овала, предельные циклы попадают в области, описанные в теореме 1.

2. Для системы (13) построена функция Дюлака при $n = 9$, $k = 1/2$ на сетке узлов $x_i \in [p, q]$, $p = -1.5$, $q = 1.5$, $N_0 = 500$. Получено решение $C^*, L^* \approx 10^{-21}$ задачи линейного программирования (6) для функции $\Phi(x, C)/(1 + x^{18})$. Уравнение $\Psi(x, y, C^*) = 0$ определяет в полосе $p \le x \le q$ единственный овал.

С помощью метода продолжения по параметру численными методами нами приближенно построена функция предельных циклов, которая подтверждает справедливость результатов, изложенных в теореме 6.

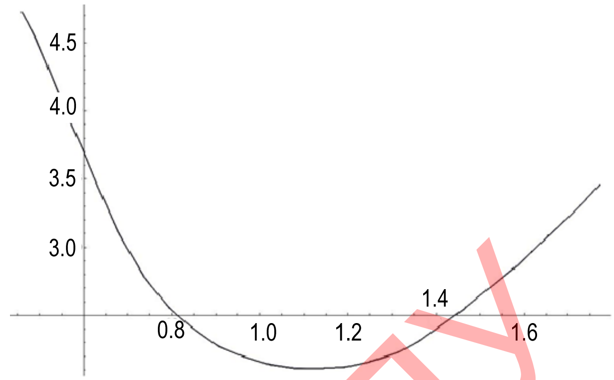

Рисунок 4 – Приближенно построенная функция предельных циклов $a = AH(x)$ системы (13)

2.2 Оценка числа предельных циклов двухпараметрических семейств систем Льенара. Рассмотрим двухпараметрическую систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - \left(-x^5 + a_3x^3 + \frac{x^2}{2} - ax\right), \frac{dy}{dt} = -x, \qquad (14)$$

$$F(x) = -x^5 + a_3x^3 + \frac{x^2}{2} - ax, g(x) = x, a, a_3 \in R.$$

Используя Смейл-анализ – отсутствие предельных циклов при условии, что нечетная часть функции $F(x)$ не имеет положительных нулей, найдем на плоскости параметров $a, a_3, a > 0, a_3 > 0$ область отсутствия положительных нулей функции $\varphi(x) = F(x) - F(-x)$. Границей этой области будет кривая $\gamma : a_3 = 2\sqrt{a}$, полученная из условия

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0; \\ \varphi'(x) = 0. \end{cases}$$

Теорема 6. *В точках, изображенных на рисунке 5, система (14) имеет при*

1) $-1 \le a \le -0.1, -1 \le a_3 \le 3$ один предельный цикл;
2) $a > 0$ для точек, лежащих выше кривой γ, два предельных цикла:

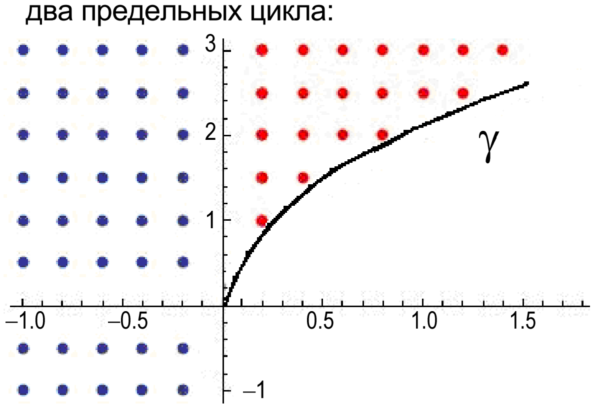

Рисунок 5 – Области постоянного числа предельных циклов системы (14)

Справедливость данной теоремы доказывается с помощью построения функции Дюлака–Черкаса в каждой точке. Следует отметить, что, уплотняя полученные множества точек путем увеличения их количества, можно получить точную оценку числа предельных циклов для всех точек из рассматриваемых областей.

Заключение. В результате проведенного исследования дана оценка сверху и снизу значения параметра, разделяющего область существования двух предельных циклов и область их отсутствия для двух однопараметрических семейств систем Льенара с линейной восстанавливающей функцией и функцией трения – многочленом четвертой степени. В теореме 6 значительно улучшен результат, полученный в [6].

Для двухпараметрического семейства систем Льенара в плоскости рассматриваемых параметров найдены области, в которых построены множества точек, соответствующих системам Льенара с определенным числом предельных циклов.

Все результаты, полученные по оценке числа предельных циклов рассматриваемых систем Льенара, согласуются с оценками, полученными при помощи численных методов.

Литература

1. *Баутин, Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука. – 1976. – 496 с.
2. *Черкас, Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов / Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 5. – С. 779–801.
3. *Черкас, Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.
4. *Гринь А.А.* Функция Дюлака для систем Льенара / А.А. Гринь, Л.А. Черкас // Труды института математики НАН Беларуси. – 2000. – № 4. – С. 29–38.
5. *Yanqian, Ye* Theory of limit cycles / Ye Yanqian, Cai Suilin, Chiyeung Lo // Transl. of AMS. Math. Monographs. Providence. – 1986. – Vol. 66. – 435 p.
6. *Gassull, A.* New criteria for the existence of limit cycles in Lienard differential systems / A. Gassull, H. Giacomini, J. Libre // Dynamical Systems. – Vol. 24. – № 2. – 2009. – P. 171–185.

Summary

The estimate of a number of limit cycles for Lienard systems with Linear restoring force and friction function is polynomial of fourth degree is done with the help of building Dulac-Cherkas function on a number of occasions for the systems with one or two parameters. Also for mentioned systems Andronov-Hopf's functions are built which confirmed reliability received estimates. Improved estimate up and down mean of a parameter which determines system from with two limit cycles.

Поступила в редакцию 14.02.11.