

МЕТОДИКА ВЫКЛАДАНИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК [517+004.94+535.4](07)

*И.В. Кирюшин, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики БГПУ*

ИЗУЧЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Введение. Формированию компетентности вузовских выпускников физических и инженерно-технических специальностей может содействовать усиление профессиональной направленности математического образования, которое, в свою очередь, обеспечивается через его интеграцию с физикой. Особенности интеграции в содержании профессионального образования изучали М.Н. Берулава, В.А. Далингер, А.Я. Данилюк, Н.К. Чапаев, И.П. Яковлев. Вопросами интегрирования вузовской математики со специализациями занимались В.Р. Беломестнова, Л.В. Васяк, Е.А. Попова, С.И. Федорова, Е.Б. Чуюко, А.К. Шарипов, В.А. Шершнева и др. М.Н. Берулава различает в межпредметной интеграции три уровня: уровень целостности (высокий), дидактического синтеза (средний) и межпредметных связей (низкий) [1, с. 118]. Математический анализ является важнейшей базовой дисциплиной для физиков и инженеров. Педагогическая интеграция математического анализа и физики в области практики образования находится сейчас на уровне межпредметных связей. Она может осуществляться через математическое [2] и компьютерное [3–4] моделирование физических процессов (явлений). В работах [3–4] были рассмотрены лишь общие вопросы. Поэтому целью данной статьи является обсуждение методики изучения степенных рядов в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования оптических явлений, создающей условия для повышения профессиональной компетентности будущих инженеров и физиков.

Степенные ряды и их приложение к вычислению пределов. При изучении этого мате-

риала можно рассмотреть явления многолучевой интерференции света и дифракции Фраунгофера. Если в некоторую точку экрана приходит одновременно N лучей равной интенсивности, а фаза каждого следующего луча сдвинута по отношению к предыдущему лучу на постоянную величину x , то общая интенсивность I , возникающая при их интерференции, равна [5, с. 374]:

$$I(x) = I_0 \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность, создаваемая каждым из лучей в отдельности. В учебных целях раскладываем величину $I(x)$ в ряд, используя разложение синуса в ряд Маклорена. Частичная сумма $S_m(x)$ с номером m будет иметь вид:

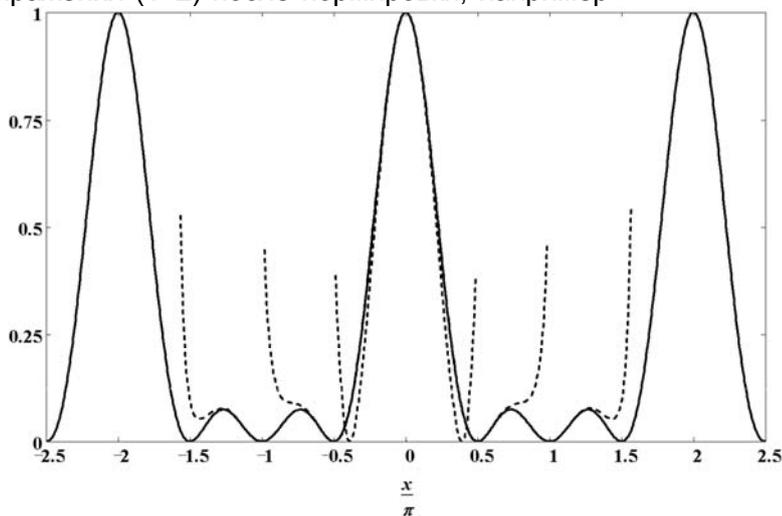
$$S_m(x) = \left[\frac{\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{Nx}{2}\right)^{2n+1}}{\sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}} \right]^2. \quad (2)$$

При значениях $x = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) выражение (1) становится неопределенным, а эту неопределенность вида $(0/0)$ можно раскрыть, дважды применяя правило Лопиталья–Бернулли. Следует также показать студентам, как найти предел, пользуясь первыми членами разложения в ряд числителя и знаменателя выражения (2). При $m = 0$ получим:

$$I(2\pi k) = \lim_{x \rightarrow 2\pi k} I_0 \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} = I_0 \frac{(Nx/2)^2}{(x/2)^2} = I_0 N^2. \quad (3)$$

Мы нашли интенсивность главных максимумов. Она оказалась в N^2 раз больше интенсивности отдельного колебания, поскольку результирующая амплитуда, очевидно, возросла в N раз, а интенсивность, как известно, пропор-

циональна квадрату амплитуды. Для компьютерного моделирования (которое удобно проводить в системе «MathCad») лучше нормировать общую интенсивность на $I_0 N^2$. Используем выражения (1–2) после нормировки, например



при $N = 4$ (четыре луча), полагая, что в равенстве (2) $m = 1, 5, 10$. По оси абсцисс откладываем величину x , выраженную в единицах π (рисунок 1).

Рисунок 1 – Графики зависимостей $I(x)/(I_0 N^2)$ (сплошная линия) и $S_m(x)$ (пунктир, $m = 1, 5, 10$)

Следует обратить внимание учащихся на то, что предельное значение нормированной интенсивности в главных максимумах (при $x/\pi = 0, \pm 2, \dots$), как видно из графиков, совпадает с рассчитанным с помощью рядов. Кроме того, с ростом величины m точность аппроксимации возрастает, аппроксимирующие кривые «облегают» все большее число максимумов, а «точка отрыва» постепенно удаляется от главного максимума, наблюдаемого при $x = 0$.

Затем переходят к моделированию дифракции Фраунгофера от бесконечно длинной щели. В этом случае интенсивность $I(\varphi)$ дифрагированного света в точке экрана, положение которой определяется углом φ с оптической осью линзы, равна [5, с. 403]

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2(\pi b(\sin \varphi) / \lambda)}{(\pi b(\sin \varphi) / \lambda)^2}, \quad (4)$$

где I_0 – интенсивность в середине дифракционной картины (напротив центра линзы), b – ширина щели, λ – длина волны света. Очевидно, при значениях φ , удовлетворяющих условию $b \sin \varphi = \pm k \lambda$ ($k \in N$), интенсивность обращается в нуль (положения минимумов). Однако при стремлении величины φ к нулю имеется неопределенность вида $(0/0)$, которую можно раскрыть, применяя правило Лопиталья–Бернулли дважды. Надо продемонстрировать студентам, как можно найти указанный предел, используя разложение величины $I(\varphi)$ в ряд по степеням $x = \sin \varphi$ (после выполнения деления):

$$I(x) = I_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi b x}{\lambda} \right)^{2n} \right]^2. \quad (5)$$

Из этого соотношения легко получить, что $\lim_{\varphi \rightarrow 0} I(\varphi) = \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = I_0$.

При компьютерном моделировании мы будем опираться на соотношения (4–5). Для нормированной интенсивности $I(x)/I_0$ (например, при отношении $b/\lambda = 8$) строим график функции, определяемой зависимостью (4), и графики частичных сумм ряда (5), ограничиваясь значениями максимального индекса, равными $m = 1, 5, 10$ (рисунок 2). При этом надо сделать акцент на том, что предельное значение величины $I(x)/I_0$ в точке $x = \sin \varphi = 0$, как видно из графика, совпадает со значением, рассчитанным нами выше с помощью ряда. Следует также обязательно отметить, что повышение точности аппроксимации с увеличением значения m выражается в том, что графики частичных сумм повторяют все большее число изгибов главной кривой. Так, при $m = 1$ первая пунктирная кривая достаточно хорошо приближает лишь главный максимум, при $m = 5$ вторая пунктирная кривая «ложится» на максимум вторичный, а при $m = 10$ третий «пунктир» достигает уже третьего минимума (рисунок 2).

Приложение степенных рядов к вычислению интегралов можно рассмотреть на примере моделирования явления дифракции Френеля от края полуплоскости. Сначала студенты выполняют аппроксимацию так называемых интегралов Френеля, не берущихся в квадратурах:

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx. \quad (6)$$

Используя разложение косинуса и синуса в ряд Маклорена, а затем, опираясь на свойства

равномерно сходящихся (степенных) рядов, проводят интегрирование полученных выражений и приходят к представлению каждого из интегралов Френеля в виде ряда:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}, \quad (7)$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}. \quad (8)$$

При компьютерном моделировании строятся графики зависимостей $C(x)$ и $S(x)$ согласно (6), а также графики соответствующих

частичных сумм по (7–8) с наибольшим значением индекса, равным $m = 1, 2, 5, 6, 9, 10$ (рисунок 3).

Затем можно перейти к моделированию спирали Корню (клотоиды), позволяющей находить амплитуду светового колебания в любой точке экрана с помощью векторного представления [5, с. 396]. Уравнение спирали Корню в параметрической форме в координатах ξ – η имеет вид: $\xi = C(x)$, $\eta = S(x)$, где $|x|$ – длина дуги данной кривой, измеряемая от начала координат (рисунок 4).

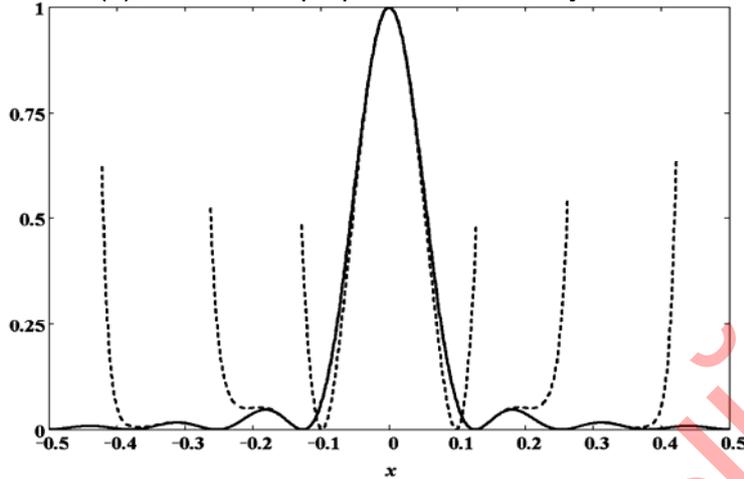


Рисунок 2 – Графики зависимости $I(x)/I_0$ согласно выражению (4) (сплошная линия) и частичных сумм по (5) (пунктир, $m = 1, 5, 10$)

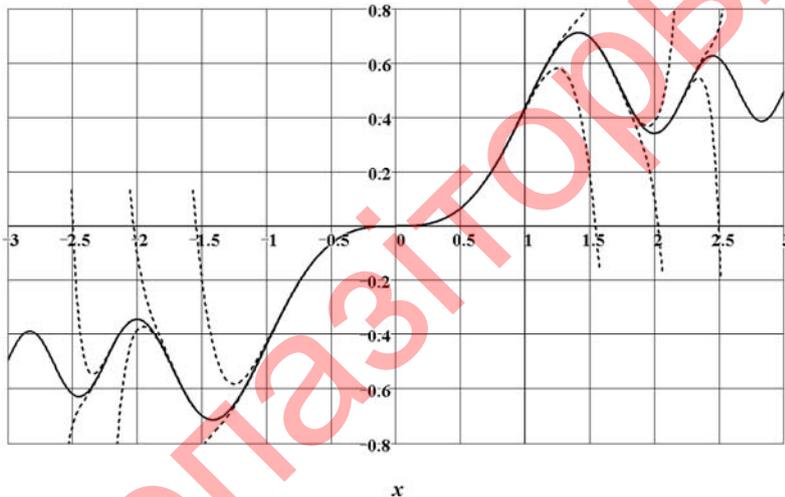


Рисунок 3 – Графики зависимости $S(x)$ согласно (6) (сплошная линия) и частичных сумм по (8) (пунктир, $m = 1, 2, 5, 6, 9, 10$)

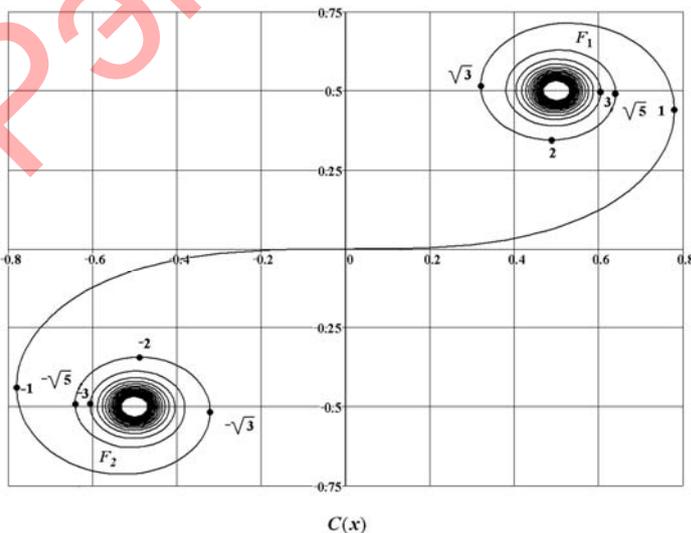


Рисунок 4 – Спираль Корню

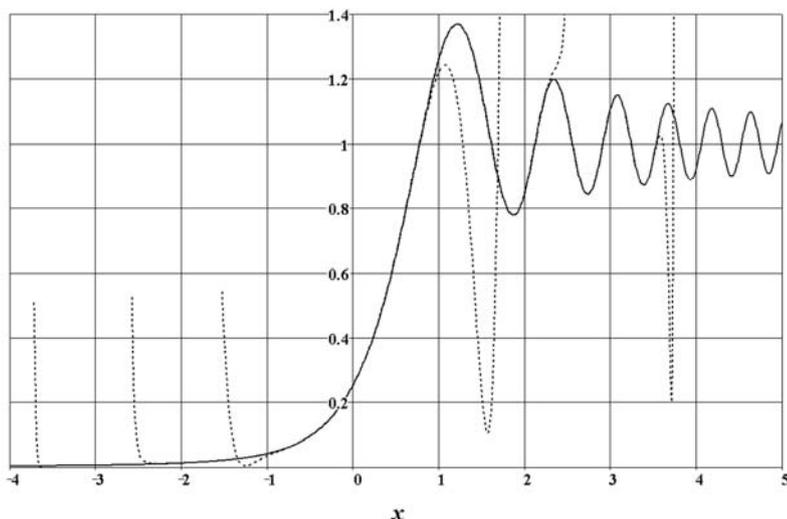


Рисунок 5 – Относительная интенсивность дифрагированного света, рассчитанная по уравнению (10) (сплошная линия), и ее приближения рядами (пунктир, $m = 1, 10, 25$)

Кривая обладает центральной симметрией относительно начала координат. Числа, размещенные вдоль кривой, представляют собой значения параметра x , или переменной в верхнем пределе интегралов Френеля (6). Точки F_1 и F_2 называются фокусами или полюсами спирали Корню. К ним она асимптотически приближается, когда x стремится к $+\infty$ и $-\infty$. Координаты полюсов равны

$$F_1 = (1/2; 1/2), F_2 = (-1/2; -1/2).$$

Найдем зависимость $\varphi = \varphi(x)$ угла наклона касательной к кривой в точке с заданным значением параметра x . Из выражений (6) следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\sin(\pi x^2 / 2) dx}{\cos(\pi x^2 / 2) dx} = \operatorname{tg}(\pi x^2 / 2). \quad (9)$$

Таким образом, получаем, что $\varphi = \pi x^2 / 2$.

Так, например, при значениях $x = \pm\sqrt{2n-1}$, $n \in N$ касательная к клотоиде перпендикулярна оси $\xi=C(x)$, а при $x = \pm\sqrt{2n-2}$ – параллельна ей. В начале координат касательная к кривой совпадает с горизонтальной осью. Компьютерную аппроксимацию клотоиды лучше проводить, используя в качестве одной из координат $\xi=C(x)$ или $\eta=S(x)$ (уравнения (6)), а в качестве другой – частичные суммы ряда (8) или (7). С увеличением верхнего индекса частичной суммы длина участка «совпадения» аппроксимирующей кривой со спиралью Корню возрастает.

Далее следует рассмотреть результат применения клотоиды для расчета интенсивности светового колебания в некоторой точке P экрана. Относительная интенсивность $I(P)$ равна:

$$I(P) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - C(x) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(x) \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Положение точки P будем характеризовать координатой z , отмеряемой от границы геометрической тени, которую отбрасывает на экран

край полуплоскости. Если точка наблюдения находится в освещенной области ($z > 0, x < 0$), конец вектора амплитуды движется по левой ветви спирали Корню (начало вектора при этом находится в полюсе F_1) (рисунок 4). В результате интенсивность осциллирует с такой амплитудой, которая уменьшается с удалением от края геометрической тени и асимптотически приближается к «недифрагированному» значению (ему соответствует вектор F_1F_2) (рисунок 5). На границе тени ($z = 0, x = 0$) из выражения (10) имеем $I(P) = 1/4$, чему соответствует вектор F_1O . В области геометрической тени ($z < 0, x > 0$) конец вектора амплитуды движется уже по правой ветви спирали Корню (начало вектора при этом по-прежнему находится в фокусе F_1). Значит, интенсивность монотонно уменьшается до нуля.

При аппроксимации расчет относительной интенсивности проводим с помощью (10), в котором вместо $C(x)$ и $S(x)$ используем частичные суммы рядов (7–8) с одинаковым верхним индексом m (рисунок 5). Обращаем внимание студентов на характерные особенности поведения аппроксимирующих кривых с увеличением значения m .

Рассмотрим теперь возможности для продуктивного обучения математике, которое, в отличие от непродуктивного обучения, подразумевает творческое овладение материалом. Это может достигаться путем постановки ряда исследовательских интеграционных задач. Например, достаточно сложной задачей, которую можно предложить студентам для самостоятельной домашней работы, является оценка погрешности приближения функций, рассмотренных выше, частичными суммами рядов. Более простое задание: проанализировать влияние значения какого-либо параметра на конечный результат моделирования и найти наиболее оптимальный диапазон, обеспечивающий наглядное представление модели. Так

или иначе, творческие задания, на наш взгляд, должны быть обязательным атрибутом интеграционного обучения.

Эффективность математической подготовки студентов физических и инженерно-технических специальностей напрямую связана с их умением использовать математику в своей практической деятельности. Совершенное владение математикой подразумевает не только знание основ математической теории, но и возможность ее практического применения. К сожалению, последнему моменту в курсе математики уделяется в настоящее время еще не достаточно внимания. Приобретение студентами математических умений и навыков при решении чисто математических задач на практических занятиях не гарантирует автоматического «переноса» этих умений и навыков на прикладные задачи, где требуется работа с математической моделью физического явления.

Обучение математическому моделированию – это весьма сложный процесс, который нельзя отдавать только «на откуп» специальным физическим и техническим дисциплинам, а следует начинать уже в курсах математических дисциплин. Очевидно, лишь в ходе изучения математики студенты могут приобрести ценный математический опыт, связанный со всеми тонкостями, условиями и ограничениями в применении математического аппарата при моделировании тех или иных физических явлений. Особенно важной представляется мотивационная функция прикладного моделирования. Она может обеспечить значительный рост интереса учащихся к изучению математики благодаря естественному приоритету профессиональных ценностей и установок. Компьютерное моделирование, опирающееся, разумеется, на моделирование математическое, должно сыграть здесь весьма важную роль, особенно в связи с развитием информационного сообщества.

Заключение. Впервые предлагается использовать компьютерное моделирование оптических явлений для обучения математическому анализу студентов физических и инженерно-технических специальностей по теме «Степенные ряды и их приложения».

Рассмотрена методика проведения интеграционной лабораторной работы, создающая условия для лучшего усвоения нового материала. Компьютерное моделирование обеспечивает также повторение материала из курса математического анализа по темам «Предел функции», «Параметрически заданные функции», «Интеграл с переменным верхним пределом». Наконец, студенты могут приобрести определенные навыки в компьютерном моделировании физических явлений. Таким образом, компьютерное моделирование, как оно рассмотрено выше, создает необходимые условия для повышения профессиональной компетентности выпускников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берулава, М.Н.* Интеграция содержания образования / М.Н. Берулава; Рос. акад. образования. – М.: Педагогика, 1993. – 170 с.
2. *Беломестнова, В.Р.* Математическое моделирование как средство интеграции курса математики с физическими дисциплинами при обучении студентов физических специальностей / В.Р. Беломестнова // Омский научный вестник. – 2006. – № 7 (43). – С. 192–201.
3. *Кирюшин, И.В.* Реализация межпредметных связей высшей математики через компьютерное моделирование физических явлений / И.В. Кирюшин // Современные проблемы высшего профессионального образования: материалы II Междунар. науч.-метод. конф.: в 2 ч. / Курск. гос. техн. ун-т. – Курск, 2010. – Ч. 1. – С. 63–65.
4. *Кирюшин, И.В.* Построение межпредметных связей математики и физики в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования физических процессов / И.В. Кирюшин // Вестн. БДПУ. Серия 3. – 2009. – № 4 – С. 16–21.
5. *Савельев, И.В.* Курс общей физики: учеб. пособие. В 3 т. / И.В. Савельев. – 3-е изд. – М.: Наука, 1988. – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – 496 с.

SUMMARY

For the first time, the method for training high school students of physical and engineering specialties in the course of mathematical analyses (Taylor's series and its applications) computer modeling of optical phenomenon such as diffraction and interference is considered. The computer modeling creates favorable conditions for formation professional competence of specialists due to both increasing motivation to learn mathematics and experience of physical modeling.

Поступила в редакцию 27.10.2010.