УДК 517.95

***У.А. Шылінец,*** *кандыдат фізіка-матэматычных навук,*
*дацэнт кафедры матэматыкі БДПУ;*
***А.В. Альшэўская, М.Г. Двурэчанская,***
*студэнты 5 курса*
*фізічнага факультэта БДПУ*

# ЗНАХОДЖАННЕ АГУЛЬНАГА РАШЭННЯ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ДРУГОГА ПАРАДКУ ПРЫ ДАПАМОЗЕ ГІПЕРКАМПЛЕКСНЫХ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

***Уводзіны.*** Вядомы шэраг прац [1–7] , у якіх для даследавання раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выкарыстоўваліся гіперкамплексныя манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі [8]. У дадзенай працы пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый даследуецца сістэма дырерэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку з трыма невядомымі функцыямі. Для даследавання дадзенай сістэмы выкарыстоўваюцца гіперкамплексныя функцыі выгляду

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w \ (\lambda^3 = 1). \tag{1}$$

Неабходна падкрэсліць, што функцыі выгляду (1) выкарыстоўваюцца для даследавання функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце [9–10], а таксама функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый [11–12].

Мноства ўсіх камплексных або рэчаісных функцый, адназначна вызначаных у некаторым адназвязным абсягу $D$ эўклідавай прасторы $E^n$ ( $x_1, \ldots, x_n$ ), дзе $n \geq 2$, і непарыўна дыферэнцавальных $k$ разоў у абсягу $D$, будзем абазначаць $C^k(D)$ (выпадак $k = 0$ адпавядае функцыям, непарыўным у абсягу $D$).

Мноства ўсіх функцый выгляду

$$F = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k (x_1, \ldots, x_n) e_k$$

($\varphi_k \in C^k(D)$; $e_1, \ldots, e_m$ – базіс некаторай лінейнай асацыятыўна-камутатыўнай алгебры $A$ з адзінкай над полем камплексных або рэчаісных лікаў) будзем абазначаць $C^k(D, A)$.

Няхай дадзены функцыі $F$, $p_k \in C^1(D, A)$. Фармальныя вытворныя $\dfrac{\partial F}{\partial p_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ – гэта такія функцыі ад $x_1, \ldots, x_n$, якія вызначаюцца з сістэмы

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \tag{2}$$

дзе $\left| \dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} \right|^{-1}$ існуе ($k, i = 1, \ldots, n$) [13–14].

Аналагічна будуюцца дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя) вышэйшых парадкаў для функцый $F$, $p_k \in C^2(D, A)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_k^2} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right); \ \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \tag{3}$$

$(k, i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$.

Няхай функцыі $f$, $p_k \in C^1(D, A)$ $(k = 1, \ldots, m;$ $m \leq n)$. Тады функцыя $f$ будзе манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагеннай) у абсягу $D$ па функцыях $p_1, \ldots, p_m$ [15], калі знойдуцца такія адзіныя функцыі $\theta_k \in C^1(D, A)$ $(k = 1, \ldots, m)$, што для ўсіх пунктаў абсягу $D$

$$df = \sum_{k=1}^{m} \theta_k \, dp_k .$$

***Асноўная частка.*** Даследуем сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку наступнага выгляду:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}- \\ -2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}- \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}- \\ -2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

дзе $u$, $v$, $w$ – шуканыя камплексназначныя функцыі трох рэчаісных зменных $x$, $y$, $z$ класа $C^2$ ( $D$ ). Разгледзім задачу знаходжання агульнага рашэння сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў (4).

Няхай алгебра $A$ – асацыятыўна-камутатыўная алгебра з базісам 1, $\lambda$, $\lambda^2$, дзе закон множання вызначаецца роўнасцю $\lambda^3 = 1$. Увядзём у разгляд гіперкамплексную функцыю

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w \quad ( f \in C^2(D, A) ).$$

Базай будзем называць сукупнасць функцый, па якіх знаходзяцца фармальныя вытворныя [14]. У якасці базы фармальных вытворных выбіраем гіперкамплексныя функцыі

$$p = x + 2y\lambda + z\lambda^2,\ q = y\lambda + z\lambda^2,\ t = z\lambda^2.$$

Тады з азначэння фармальных вытворных (2) і (3) вынікае наступная тэарэма.

**Тэарэма 1.** Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4) раўназначная раўнанню ў фармальных вытворных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \qquad (5)$$

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне ў фармальных вытворных (5). Яго можна запісаць у выглядзе $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}+f\right)=0$, адкуль вынікае, што

$$\frac{\partial f}{\partial t}+f=V_1, \qquad (6)$$

дзе $V_1$ – адвольная функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыях $p$ і $q$ у абсягу $D$. У гэтым выпадку дамовімся пісаць $V_1 = V_1[p,q,D,A]$.

Раўнанне (6) можна запісаць у наступным выглядзе: $\dfrac{\partial}{\partial t}(f-V_1)=-(f-V_1)$.

Рашэнне апошняга раўнання знаходзім падстаноўкай выгляду $f - V_1 = V_2 \exp(-t)$ і атрымаем $\dfrac{\partial V_2}{\partial t}=0$, гэта значыць $V_2 = V_2[p,q,D,A]$ – адвольная функцыя, F-манагенная па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ ( $\lambda^3 = 1$ ) у абсягу $D$.

Такім чынам, атрымліваем наступную тэарэму.

**Тэарэма 2.** Агульнае рашэнне раўнання (5) мае выгляд

$$f = V_1 + V_2 \exp(-t), \qquad (7)$$

дзе $V_1 = V_1[p,q,D,A]$, $V_2 = V_2[p,q,D,A]$ – адвольныя функцыі, F-манагенныя па функцыях $p$ і $q$ у абсягу $D$.

У агульным рашэнні (7) дыферэнцыяльнага раўнання (5) прысутнічаюць функцыі $V_1 = V_1[p,q,D,A]$, $V_2 = V_2[p,q,D,A]$, F-манагенныя па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ у абсягу $D$. Абазначым клас такіх функцый праз $f[p,q,D,A]$ і даследуем структуру функцый класа $f[p,q,D,A]$.

Поруч з гіперкамплекснай сістэмай з базісам 1, $\lambda$, $\lambda^2$ $(\lambda^3 = 1)$ разгледзім гіперкамплексную сістэму з базісам

$$e_1 = x_1\lambda^2 - x_1\lambda(1+r) + x_1 r,$$

$$e_2 = x_2\lambda^2 - x_2\lambda(1+r^2) + x_2 r^2,$$

$$e_3 = x_3\lambda^2 - x_3\lambda(r+r^2) + x_3,$$

дзе $r = e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $r^3 = 1$, $1 + r + r^2 = 0$; $x_1$, $x_2$, $x_3$ – камплексныя лікі – рашэнне сістэмы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1 r^2 + x_2 r + x_3 = 0,$$

$$x_1 r + x_2 r^2 + x_3 = 1.$$

Тады $e_1 + e_2 + e_3 = 1$, $e_i \cdot e_k = 0$ $(i \neq k)$, $e_1\,(e_1 + e_2 + e_3) = e_1$, адкуль $e_1^2 = e_1$; аналагічна $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_3$.

Відавочнай з'яўляецца роўнасць

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - r)(\lambda - r^2).$$

Калі ўлічыць, што $\lambda^3 = 1$, то будзем мець

$$e_1\,(\lambda - r^2) = 0,$$

$$e_2\,(\lambda - r) = 0,$$

$$e_3\,(\lambda - 1) = 0,$$

адкуль

$$\lambda e_1 = r^2 e_1,\ \lambda e_2 = r e_2,\ \lambda e_3 = e_3.$$

Такім чынам, $\lambda = e_1 r^2 + e_2 r + e_3$, $\lambda^2 = e_1 r + e_2 r^2 + e_3$, адкуль

$$a + b\lambda + c\lambda^2 = e_1(a + br^2 + cr) +$$
$$+ e_2(a + br + cr^2) + e_3(a + b + c),$$

дзе $a$, $b$, $c$ – камплексныя лікі або элементы любой алгебры.

Калі скарыстаць апошнюю роўнасць, то функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$, $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$, $q = y\lambda + z\lambda^2$, $l = l_1 + \lambda l_2 + \lambda^2 l_3$, $h = h_1 + \lambda h_2 + \lambda^2 h_3$ можна запісаць наступным чынам:

$$f = Pe_1 + Qe_2 + Re_3,\ p = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3,$$
$$q = \xi e_1 + \eta e_2 + \varsigma e_3,\ l = Ae_1 + Be_2 + Ce_3,$$
$$h = He_1 + Me_2 + Ne_3,$$

дзе

$$P = u + vr^2 + wr,\ Q = u + vr + wr^2,$$
$$R = u + v + w,$$
$$\alpha = x + 2yr^2 + zr,\ \beta = x + 2yr + zr^2,$$
$$\gamma = x + 2y + z,$$
$$\xi = yr^2 + zr,\ \eta = yr + zr^2,\ \varsigma = y + z$$

(аналагічна для $A$, $B$, $C$, $H$, $M$, $N$).

Тады ўмова манагеннасці функцыі $f$ па функцыях $p$ і $q$

$$df = l\,dp + h\,dq$$

прыме наступны выгляд:

$$e_1 dP + e_2 dQ + e_3 dR =$$
$$= e_1 A d\alpha + e_2 B d\beta + e_3 C d\gamma +$$
$$+ e_1 H d\xi + e_2 M d\eta + e_3 N d\varsigma,$$

адкуль

$$dP = A d\alpha + H d\xi,\ dQ = B d\beta + M d\eta,$$
$$dR = C d\gamma + N d\varsigma,$$

гэта значыць, камплексная функцыя $P$ з'яўляецца F-манагеннай па дзвюх камплексных функцыях $\alpha$ і $\xi$, $Q$ з'яўляецца F-манагеннай па функцыях $\beta$ і $\eta$, $R$ – F-манагеннай па функцыях $\gamma$ і $\varsigma$.

Атрыманы вынік сфармулюем у выглядзе тэарэмы.

**Тэарэма 3.** Для таго каб функцыя $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ $(\lambda^3 = 1)$ была F-манагеннай па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ $(u, v, w \in C^1(D);\ u = u(x, y, z)$ і г. д.), неабходна і дастаткова, каб камплексная функцыя $P = u + vr^2 + wr$ была манагеннай па камплексных функцыях $\alpha = x + 2yr^2 + zr$ і $\xi = yr^2 + zr$; камплексная функцыя $Q = u + vr + wr^2$ была манагеннай па камплексных функцыях $\beta = x + 2yr + zr^2$ і $\eta = yr + zr^2$; камплексная функцыя $R = u + v + w$ была манагеннай па функцыях $\gamma = x + 2y + z$ і $\varsigma = y + z$.

Такім чынам, для кампанентаў $u$, $v$, $w$ функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ $(\lambda^3 = 1)$, F-манагеннай па дзвюх функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$, маем

$$\left.\begin{aligned} u + vr^2 + wr &\equiv P[\alpha, \xi], \\ u + vr + wr^2 &\equiv Q[\beta, \eta], \\ u + v + w &\equiv R[\gamma, \varsigma], \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

дзе $P[\alpha, \xi]$ $(Q[\beta, \eta], R[\gamma, \varsigma])$ – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыях $\alpha$ і $\xi$ ($\beta$ і $\eta$, $\gamma$ і $\varsigma$).

З сістэмы (8), улічыўшы, што $1 + r + r^2 = 0$, атрымаем

$$u = \frac{P + Q + R}{3}. \qquad (9)$$

Калі другую роўнасць сістэмы (8) памножыць на $r$, а першую – на (–1) і скласці, атрымаем

$$w = \frac{Q\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}r\right) + R\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}r\right)}{1 - r}. \qquad (10)$$

Калі першую роўнасць сістэмы (8) памножыць на $r$ і адняць ад атрыманай роўнасці другую, то будзем мець

$$v] \frac{P\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}r\right) - Q\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}r\right) - R\left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{3}\right)}{1 - r} \qquad (11)$$

Заўважым, што ў формулах (9) – (11) $P \equiv P[\alpha, \xi]$, $Q \equiv Q[\beta, \eta]$, $R \equiv R[\gamma, \varsigma]$.

Такім чынам, атрымалі наступную тэарэму.

**Тэарэма 4.** Структура функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$, F-манагеннай па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$, вызначаецца формуламі (9) – (11), дзе $\alpha = x + 2yr^2 + zr$, $\beta = x + 2yr + zr^2$, $\gamma = x + 2y + z$, $\xi = yr^2 + zr$, $\eta = yr + zr^2$, $\varsigma = y + z$.

Каб атрымаць рашэнне $u, v, w$ сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4), вылучым кампаненты пры базісных адзінках $1, \lambda, \lambda^2$ агульнага рашэння (7) дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (5).

Згодна з тэарэмай 4, маем:

$$
\left.\begin{aligned}
V_1 &= \frac{P_1+Q_1+R_1}{3}+\\
&+\frac{P_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_1\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\lambda+\\
&+\frac{Q_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\lambda^2,\\
V_2 &= \frac{P_2+Q_2+R_2}{3}+\\
&+\frac{P_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_2\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\lambda+\\
&+\frac{Q_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\lambda^2,
\end{aligned}\right\}\quad(12)
$$

дзе $P_1 \equiv P_1[\alpha,\xi], P_2 \equiv P_2[\alpha,\xi]$ – адвольныя камплексныя функцыі, F-манагенныя па функцыях $\alpha$ і $\xi$; $Q_1 \equiv Q_1[\beta,\eta], Q_2 \equiv Q_2[\beta,\eta]$ – адвольныя камплексныя функцыі, F-манагенныя па функцыях $\beta$ і $\eta$; $R_1 \equiv R_1[\gamma,\varsigma], R_2 \equiv R_2[\gamma,\varsigma]$ – адвольныя камплексныя функцыі, F-манагенныя па функцыях $\gamma$ і $\varsigma$.

Улічваючы, што $t = z\lambda^2 = e_1zr + e_2zr^2 + e_3z$, атрымліваем:

$$
\begin{aligned}
&\exp(-t) = \exp(-e_1zr - e_2zr^2 - e_3z) =\\
&\exp(-e_1zr)\cdot\exp(-e_2zr^2)\cdot\exp(-e_3z) =\\
&\left(1-\frac{zr}{1!}e_1+\frac{(zr)^2}{2!}e_1-\ldots\right)\\
&\left(1-\frac{zr^2}{1!}e_2+\frac{(zr^2)^2}{2!}e_2-\ldots\right)\left(1-\frac{z}{1!}e_3+\frac{z^2}{2!}e_3-\ldots\right)=\\
&=(1+(e^{-zr}-1)e_1)(1+(e^{-zr^2}-1)e_2)(1+(e^{-z}-1)e_3)=\\
&=(1+(e^{-zr}-1)e_1+(e^{-zr^2}-1)e_2)(1+(e^{-z}-1)e_3)=\\
&=1+(e^{-zr}-1)e_1+(e^{-zr^2}-1)e_2+(e^{-z}-1)e_3=\\
&=1+(e^{-zr}-1)(x_1\lambda^2-x_1\lambda(1+r)+x_1r)+\\
&+(e^{-zr^2}-1)(x_2\lambda^2-x_2\lambda(1+r^2)+x_2r^2)+\\
&+(e^{-z}-1)(x_3\lambda^2-x_3\lambda(r+r^2)+x_3)=\\
&=1+x_1r(e^{-zr}-1)+x_2r^2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)+\\
&+\lambda\left\{-x_1(1+r)(e^{-zr}-1)-x_2(1+r^2)(e^{-zr^2}-1)-\right.\\
&\left.-x_3(r+r^2)(e^{-z}-1)\right\}+\\
&+\lambda^2\left\{x_1(e^{-zr}-1)+x_2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\right\}.
\end{aligned}
$$

Адсюль з роўнасцей (12) вынікае, што

$$
\begin{aligned}
f &= V_1+V_2\exp(-t)=\frac{P_1+Q_1+R_1}{3}+\\
&+\frac{P_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_1\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\lambda+\\
&+\frac{Q_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\lambda^2+\\
&+\left\{\frac{P_2+Q_2+R_2}{3}+\right.\\
&+\frac{P_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_2\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\lambda+\\
&\left.+\frac{Q_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\lambda^2\right\}\\
&\Big(1+x_1r(e^{-zr}-1)+x_2r^2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)+\\
&+\lambda\left\{-x_1(1+r)(e^{-zr}-1)-x_2(1+r^2)(e^{-zr^2}-1)-\right.\\
&\left.-x_3(r+r^2)(e^{-z}-1)\right\}+\\
&+\lambda^2\left\{x_1(e^{-zr}-1)+x_2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\right\}\Big).
\end{aligned}
$$

***Заключэнне.*** З апошняй роўнасці знаходзім агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4).

**Тэарэма 5.** Агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (4) мае наступны выгляд:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{P_1+Q_1+R_1}{3}+\frac{P_2+Q_2+R_2}{3}\Big(1+x_1r(e^{-zr}-1)+\\
&+x_2r^2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\Big)+\\
&+\frac{P_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_2\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\cdot\\
&\cdot\Big(x_1(e^{-zr}-1)+x_2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\Big)+\\
&+\frac{Q_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\cdot\\
&\cdot\Big(-x_1(1+r)(e^{-zr}-1)-x_2(1+r^2)(e^{-zr^2}-1)-x_3(r+r^2)(e^{-z}-1)
\end{aligned}
$$

$$
v = \frac{P_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_1\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}+
$$

$$+\frac{P_2+Q_2+R_2}{3}\Big(-x_1(1+r)(e^{-zr}-1)-$$

$$-x_2(1+r^2)(e^{-zr^2}-1)-x_3(r+r^2)(e^{-z}-1)\Big)+$$

$$+\frac{P_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_2\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\Big(1+$$

$$+x_1r(e^{-zr}-1)+x_2r^2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\Big)+$$

$$+\frac{Q_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\cdot$$

$$\cdot\Big(x_1(e^{-zr}-1)+x_2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\Big),$$

$$w=\frac{Q_1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}+$$

$$+\frac{P_2+Q_2+R_2}{3}\Big(x_1(e^{-zr}-1)+x_2(e^{-zr^2}-1)+$$

$$+x_3(e^{-z}-1)\Big)+$$

$$+\frac{P_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-Q_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)-R_2\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}\cdot$$

$$\cdot\Big(-x_1(1+r)(e^{-zr}-1)-$$

$$-x_2(1+r^2)(e^{-zr^2}-1)-x_3(r+r^2)(e^{-z}-1)\Big)+$$

$$+\frac{Q_2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right)-P_2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right)+R_2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}\Big(1+$$

$$+x_1r(e^{-zr}-1)+x_2r^2(e^{-zr^2}-1)+x_3(e^{-z}-1)\Big),$$

дзе $P_1\equiv P_1[\alpha,\xi]$ і $P_2\equiv P_2[\alpha,\xi]$ ($Q_1\equiv Q_1[\beta,\eta]$ і $Q_2\equiv Q_2[\beta,\eta]$, $R_1\equiv R_1[\gamma,\varsigma]$ і $R_2\equiv R_2[\gamma,\varsigma]$) – адвольныя камплексныя функцыі, F-манагенныя па функцыях $\alpha = x+2yr^2+zr$ і $\xi=yr^2+zr$ ($\beta=x+2yr+zr^2$ і $\eta=yr+zr^2$, $\gamma = x+2y+z$ і $\varsigma = y+z$) у абсягу $D$; $r = e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $x_1$, $x_2$, $x_3$ – камплексныя лікі, якія з'яўляюцца рашэннем сістэмы $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1r^2+x_2r+x_3=0$, $x_1r+x_2r^2+x_3=1$.

## ЛІТАРАТУРА


1. *Стельмашук, Н.Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н.Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1. – Т. 5. – С. 166–173.
2. *Фёдоров, В.С.* Решение некоторых уравнений в частных производных методами F-моногенных функций / В.С. Фёдоров, Н.Т. Стельмашук // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. – 1973. – № 2. – Т. 18. – Р. 233–241.
3. *Кусковский, Л.Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта / Л.Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения.– 1975. – № 3. – Т. 11.– С. 523–532.
4. *Стельмашук, Н.Т.* О решении одной линейной дифференциальной системы в частных производных методами F-моногенных функций / Н.Т. Стельмашук, С.Б. Пенчанский // Дифференциальные уравнения. – 1990. – № 4. – Т. 26. – С. 724–727.
5. *Стельмашук, Н.Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993. – № 11. – Т. 29. – С. 2019–2020.
6. *Stelmashuk N.T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N.T. Stelmashuk, V.A. Shylinets // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – Т. 12. – С. 170–171.
7. *Стельмашук, Н.Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
8. *Фёдоров, В.С.* Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
9. *Стельмашук, Н.Т.* О некоторых решениях системы Максвелла / Н.Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – № 1. – Т. 10. – С. 250–252.
10. *Стэльмашук, М.Т.* Аб адной краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы Максвэла / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1994.– № 1. – С. 91–95.
11. *Стэльмашук, М.Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Г.А. Андрэева // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2010. – № 2. – С. 17–19.
12. *Стельмашук, Н.Т.* Краевая задача для функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец, Г.А. Андреева // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. VII Всерос. науч. конф. с междунар. участием. – Самара: СамГТУ, 2010. – Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – С. 266–268.
13. *Гусев, В.А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В.А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara.– 1962. – F. 2. – Т. 7. – Р. 223–238.
14. *Стельмашук, Н.Т.* Определение и свойства формальных производных / Н.Т. Стельмашук // Математика: сб. науч. тр. – Минск: МГПИ, 1973. – С. 52–59.
15. *Морев, И.А.* Об одном обобщении понятия моногенных функций / И.А. Морев // Математический сборник. – 1957. – № 2. –Т. 42. – С. 197–206.



## SUMMARY

*Using the class of F-monogenic functions the general solution of one system of differential equations in the partial derivatives is obtained.*


Паступіў у рэдакцыю 19.01.11.