УДК 517.977

Д.А. Будько, *аспирант кафедры математического анализа*
и дифференциальных уравнений
БрГУ им. А.С. Пушкина

РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Введение. Открытие Троянской группы астероидов в 1906 г. показало, что ограниченная задача трёх тел [1] является не только интересной теоретической моделью, но и имеет практические приложения, поскольку конфигурация системы Солнце–Юпитер–астероид довольно хорошо описывается треугольным решением задачи трех тел, найденным Лагражем в 1772 г. При этом астероид может находиться бесконечно долго в окрестности вершины L_4 равностороннего треугольника только в том случае, если соответствующее равновесное решение ограниченной задачи трех тел является устойчивым. По этой причине проблема устойчивости положения равновесия L_4 длительное время привлекала пристальное внимание ученых и была полностью решена только в семидесятых годах прошлого столетия. Таким образом, полное исследование равновесных решений только в плоском круговом случае заняло 200 лет.

Заметим, что среди «троянцев» имеются различные по массе астероиды, и, возможно, более крупные влияют на движение более мелких. В этой связи представляет интерес рассмотреть плоскую ограниченную круговую задачу четырех тел, сформулированную на основе треугольных решений Лагранжа. В рамках этой модели три тела (P_0, P_1, P_2), массы которых равны m_0, m_1, m_2, движутся равномерно по круговым орбитам вокруг центра масс системы, образуя в любой момент времени равносторонний треугольник. Четвертое тело (P_3) пренебрежимо малой массы движется в гравитационном поле трех массивных тел, оставаясь в их орбитальной плоскости.

Целью данной работы является исследование устойчивости равновесных решений плоской круговой ограниченной задачи четырех тел, сформулированной на основе треугольных решений Лагранжа задачи трех тел, в первом приближении и построение границ между областями устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров системы. Все символьные и численные расчеты выполняются с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Уравнения движения и их равновесные решения. Движение тела P_3 удобно исследовать во вращающейся системе координат, в которой тела P_0, P_1, P_2 покоятся в точках (0, 0), (1, 0), $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Функция Гамильтона такой системы записывается в виде:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + 2p_x y + p_y^2 - 2p_y x\right) + \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2} \times ((\frac{\mu_2}{2} + \mu_1)x + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_2 y - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{(x-1/2)^2-(y-\sqrt{3}/2)^2}})), \quad (1)$$

где p_x, p_y – импульсы, канонически сопряженные координатам x, y, и параметры $\mu_1 = m_1/m_0$, $\mu_2 = m_2/m_0$. Так как уравнения движения системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

определяемые функцией Гамильтона (1) являются нелинейными, и найти общее решение не представляется возможным, то можно попытаться найти хотя бы частные точные решения, простейшими из которых являются равновесные. Такой подход восходит к идеям Пуанкаре, Ляпунова и хорошо себя зарекомендовал при исследовании ограниченной задачи трех тел и других моделей [1–2]. Итак, приравняем производные к нулю, выразим импульсы из первых двух уравнений и подставим в третье и четвертое. Тогда после некоторых преобразований получим два уравнения, определяющие равновесные положения тела P_3:

$$\mu_1 = -\frac{(\sqrt{3}x - y)(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1)}{(\sqrt{3}(x-1)+y)(\dfrac{1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} - 1)}, \quad \mu_2 = -\frac{2y(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1)}{(\sqrt{3}(x-1)+y)(\dfrac{1}{((x-1/2)^2+(y-\sqrt{3}/2)^2)^{3/2}} - 1)}. \quad (2)$$

Геометрически решения системы (2) представляют точки пересечения двух кривых, заданными уравнениями (2) на плоскости *Oxy*. Так как найти общее решение системы (2) пока не представляется возможным, мы разработали алгоритмы для поиска всех равновесных решений численными методами и привели их реализацию в кодах системы компьютерной алгебры *Mathematica* в работе [3]. К примеру, если зафиксировать параметры $\mu_1 = 0.017$, $\mu_2 = 0.022$, получим восемь пересечений двух кривых, определенных уравнениями (2) на рисунке 1.

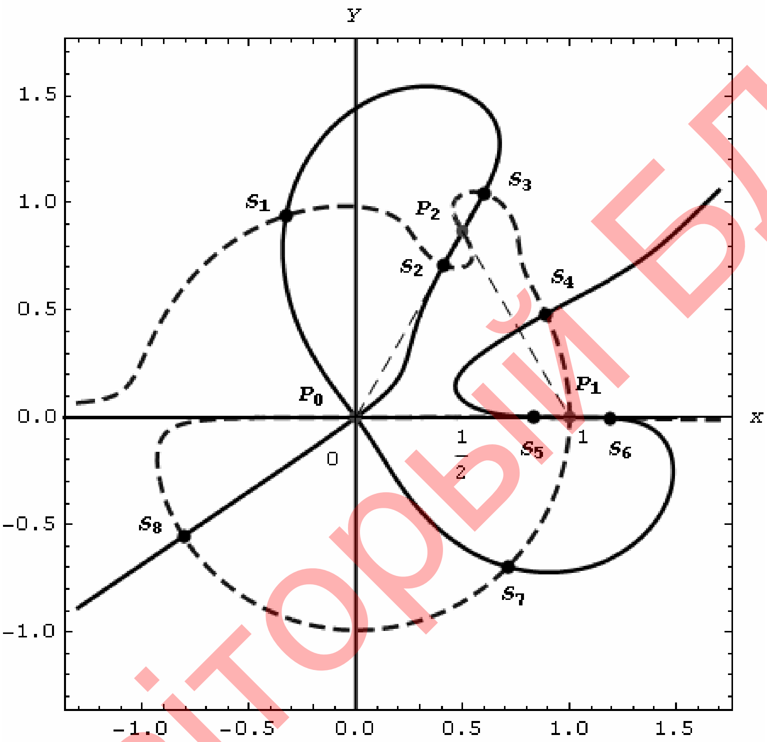

Рисунок 1 – Равновесные положения при $\mu_1 = 0.017$, $\mu_2 = 0.022$

Анализ квадратичной части Гамильтониана. Обозначим равновесное положение тела P_3 в плоскости *Oxy* через x_0, y_0. Разлагая функцию Гамильтона в ряд Тейлора в окрестности равновесного решения, получим Гамильтониан в виде:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \dots, \qquad (3)$$

где H_0 – постоянная, которая не влияет на уравнения движения. Легко заметить, что линейный член H_1 равен нулю, поэтому разложение Гамильтониана начинается с квадратичного члена H_2:

$$H_2 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} - p_y\, x + p_x\, y + h_{20}\, x^2 + h_{11}\, x\, y + h_{02}\, y^2 \qquad (4)$$

где коэффициенты h_{20}, h_{11}, h_{02} заданы формулами:

$$h_{20} = \frac{\dfrac{-8\,x_0^2 + 4\,y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}} - \dfrac{4\,(2 - 4\,x_0 + 2\,x_0^2 - y_0^2)\mu_1}{(1 - 2\,x_0 + x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} - \dfrac{(-1 - 8\,x_0 + 8\,x_0^2 + 4\sqrt{3}\,y_0 - 4\,y_0^2)\mu_2}{(1 - x_0 + x_0^2 - \sqrt{3}\,y_0 + y_0^2)^{5/2}}}{8\,(1 + \mu_1 + \mu_2)},$$

$$h_{02}=\frac{\dfrac{4(x_0^2-2y_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}}+\dfrac{4(2-4x_0+2x_0^2-y_0^2)\mu_1}{(1-2x_0+x_0^2+y_0^2)^{5/2}}+\dfrac{(-5-4x_0+4x_0^2+8\sqrt{3}\,y_0-8y_0^2)\mu_2}{(1-x_0+x_0^2-\sqrt{3}\,y_0+y_0^2)^{5/2}}}{8(1+\mu_1+\mu_2)},$$

$$\begin{gathered}h_{11}=\frac{3}{4(1+\mu_1+\mu_2)}\times\Big(-\frac{4(-1+x_0)y_0\mu_1}{(1-2x_0+x_0^2+y_0^2)^{5/2}}-(4x_0y_0(1-x_0+x_0^2-\sqrt{3}\,y_0+y_0^2)^{5/2}+\sqrt{3}(x_0^2+y_0^2)^{5/2}\mu_2-\\-2\sqrt{3}\,x_0(x_0^2+y_0^2)^{5/2}\mu_2-2y_0(x_0^2+y_0^2)^{5/2}\mu_2+4x_0y_0(x_0^2+y_0^2)^{5/2}\mu_2)/((x_0^2+y_0^2)^{5/2}(1-x_0+x_0^2-\sqrt{3}\,y_0+y_0^2)^{5/2})\Big).\end{gathered}\qquad(5)$$

Тогда линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\dot{x}=\frac{\partial H_2}{\partial p_x}=p_x+y,\quad \dot{p}_x=-\frac{\partial H_2}{\partial x}=p_y-2h_{11}x-h_{12}y,$$

$$\dot{y}=\frac{\partial H_2}{\partial p_y}=p_y-x,\quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H_2}{\partial y}=-p_x-h_{12}x-2h_{22}y.$$

Соответствующие характеристические показатели легко вычисляются и могут быть представлены в виде:

$$\lambda=\pm i\sigma_{1,2}\,,\ \sigma_{1,2}=\sqrt{1+h_{20}+h_{02}\pm\sqrt{4h_{20}+h_{20}^2+h_{11}^2+4h_{02}-2h_{20}h_{02}+h_{02}^2}}\,.\qquad(6)$$

Известно [1], что необходимое и достаточное условие линейной устойчивости заключается в том, чтобы все характеристические показатели являлись различными чисто мнимыми числами. Несложно показать, что данное условие эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}1-2h_{20}-h_{11}^2-2h_{02}+4h_{20}\,h_{02}>0;\\1+h_{20}+h_{02}>0;\\4h_{20}+h_{20}^2+h_{11}^2+4h_{02}-2h_{20}\,h_{22}+h_{22}^2>0.\end{cases}\qquad(7)$$

Поэтому для определения устойчивости равновесного решения системы (2) для заданных значений μ_1,μ_2 требуется найти численное решение системы (2), подставить полученное решение и значения μ_1,μ_2 в систему неравенств (7) и сделать вывод об устойчивости положения равновесия в линейном приближении.

Исследование линейной устойчивости равновесных решений. Хорошо известно [1], что условие линейной устойчивости треугольной конфигурации впервые было получено Раусом в 1875 г. и может быть записано в виде:

$$\frac{1+\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1+\mu_1\mu_2+\mu_2}>27\,.\qquad(8)$$

Поэтому целесообразно исследовать устойчивость полученных равновесных решений только в области, ограниченной неравенством (8). Естественно, параметры μ_1,μ_2 должны быть положительны, и, как показывает неравенство (8), достаточно малы:

$$0<\mu_{1,2}<\frac{2}{25+3\sqrt{69}}\approx 0.0400642\,.\qquad(9)$$

Мы провели анализ уравнений (2), определяющих равновесные положения тела P_3 для различных значений μ_1,μ_2 из области (9) и определили, что для любых значений μ_1,μ_2 имеется ровно восемь положений равновесия (рисунок 1). Проверка условий (7) показала, что для равновесных положений S_2,S_3,S_5,S_6,S_8 при любых значениях μ_1,μ_2 из интервала (9) существует хотя бы два действительных характеристических показателя. В результате на основе теоремы Ляпунова [4] об устойчивости по первому приближению получаем следующую теорему.

Теорема 1. Положения равновесия S_2,S_3,S_5,S_6,S_8 системы (2) являются неустойчивыми в смысле Ляпунова при любых значениях параметров μ_1,μ_2 из области, ограниченной неравенствами (8–9).

Численный эксперимент показал, что положения равновесия S_1, S_4, S_7 могут быть как устойчивыми, так и не устойчивыми, поэтому проблема определения границ между областями устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров $O\mu_1\mu_2$ является актуальной.

Используя эффективный алгоритм для построения кривых [5], мы на рисунке 2 изобразили границы областей устойчивости для равновесных положений S_1, S_4 на плоскости параметров $O\mu_1\mu_2$. Отметим, что положение равновесия S_7 при $\mu_2 < \mu_1$ располагается в точке, симметричной положению равновесия S_1 относительно линии $\mu_2 = \mu_1$ при $\mu_2 > \mu_1$. Поэтому граница области линейной устойчивости для равновесного положения S_7 может быть получена путем симметричного отображения границы устойчивости для точки S_1 относительно линии $\mu_2 = \mu_1$.

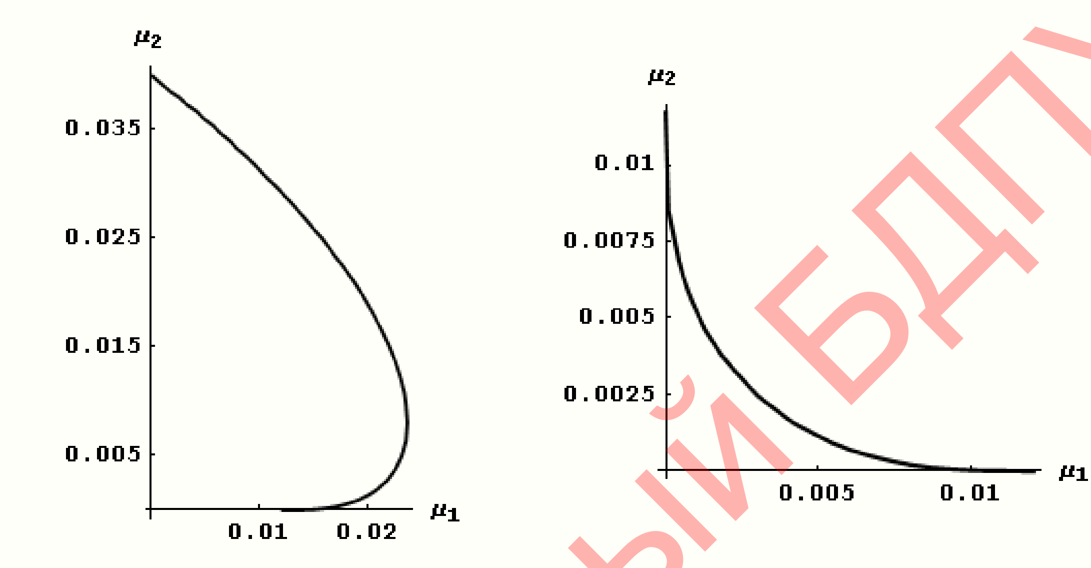

Рисунок 2 – Границы областей устойчивости для положения равновесия S_1 (слева) и S_4 (справа)

Теорема 2. Положения равновесия S_1, S_4, S_7 системы (2) являются устойчивыми в первом приближении при малых значениях параметров μ_1, μ_2 из областей, ограниченных кривыми, приведенными на рисунке 2.

Заключение. В работе рассмотрена новая математическая модель – плоская круговая ограниченная задача четырёх тел, сформулированная на основе треугольных решений Лагранжа. Найдены и исследованы на линейную устойчивость равновесные решения рассматриваемой задачи. Получены теоремы о неустойчивости в смысле Ляпунова для пяти положений равновесия. Для остальных трех построены границы между областями линейной устойчивости и неустойчивости на плоскости параметров системы.

Все символьные и численные расчеты выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев, А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А.П. Маркеев. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
2. *Gadomski, L.* Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem / L. Gadomski, E.A. Grebenikov, A.N. Prokopenya // Nonlinear oscillations. – 2007. – Vol. 10. – No. 1. – P. 66–82.
3. *Будько, Д.А.* Символьно-численный анализ равновесных решений в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько, А.Н. Прокопеня // Программирование. – 2010. – № 2 (36). – С. 68–75.
4. *Ляпунов, А.М.* Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов; под ред. Г. Мюнтц. – Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
5. *Будько, Д.А.* Об одном методе определения резонансных кривых для дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / Д.А. Будько // Современные проблемы математики и вычислительной техники: материалы Респ. науч. конф. мол. ученых и студентов, 28–30 ноября 2007 г., г. Брест. – Брест: БрГТУ, 2007. – С. 147–150.

SUMMARY

The stability of equilibrium positions in linear approximation was analyzed in planar circular restricted four-body problem, formulated on the basis of Lagrange's triangular solutions. The stability boundaries of equilibrium positions were constructed in the plane of parameters and corresponding stability theorems were proved.

Поступила в редакцию 18.02.11.