Богданович С. А., Ермолицкий А. А.

Каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры второго рода типа (J_1, J_2, P)

Понятия канонической связности $\overline{\nabla}$ и второго фундаментального терзорного поля h G–структуры были введены вторым автором и в этих терминах описана геометрия почти эрмитовых структур и структур почти произведения, [**1**].

Пусть M ($\dim M=4n$) — риманово многообразие с римановой метрикой $\tilde{g}$, на котором заданы тензорные поля J_1, J_2, P типа (1, 1), определяющие почти гиперэрмитову структуру второго рода типа (J_1, J_2, P), то есть удовлетворяющие условиям

$$J_1^2 = J_2^2 = -I, \quad P^2 = I, \quad P = J_1 J_2 = J_2 J_1 ,$$

$$g(J_1X, J_1Y)=g(J_2X, J_2Y)=g(PX, PY)=g(X, Y),$$

где g — риманова метрика на M, которую можно определить по формуле

$$g(X, Y) = \frac{1}{4}\big(\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(J_1X, J_1Y) + \tilde{g}(J_2X, J_2Y) + \tilde{g}(PX, PY)\big).$$

Эту структуру будем обозначать (J_1, J_2, P, g).

Почти комплексные структуры (J_1, g) и (J_2, g) являются эрмитовыми, а структура (P, g) — римановой структурой почти произведения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* ∇ *— риманова связность метрики* g. *Тогда каноническая связность* $\overline{\nabla}$ *структуры* (J_1, J_2, P, g) *определяется по формуле*

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}\big(\nabla_X Y - J_1\nabla_X J_1 Y - J_2\nabla_X J_2 Y + P\nabla_X PY\big).$$

Связность $\overline{\nabla}$ является метрической и $\overline{\nabla} J_1 = \overline{\nabla} J_2 = \overline{\nabla} P = 0$.

Пусть $\overset{1}{\overline{\nabla}}$, $\overset{2}{\overline{\nabla}}$ и $\overset{P}{\overline{\nabla}}$ — каноническая связность структуры (J_1, g), (J_2, g) и (P, g) соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\nabla J_1=0$, *то* 1) $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \nabla$ *и* 2) $\overline{\nabla} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{P}{\overline{\nabla}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\overline{\nabla} = \nabla$, *то* $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{P}{\overline{\nabla}} = \nabla$.

Второе фундаментальное тензорное поле h структуры (J_1, J_2, P, g) определяется по формуле

$$h_X Y = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y.$$

Пусть h^1, h^2 и h^P — второе фундаментальное тензорное поле структуры (J_1, g), (J_2, g) и соответственно (P, g).

ТЕОРЕМА 4.
1) $h_X Y = \frac{1}{2}\big(h^1_X Y + h^2_X Y + h^P_X Y\big)$,
2) $h^1_X Y = h^P_X Y + P h^2_X PY$,
3) $h^2_X Y = h^P_X Y + P h^1_X PY$.

Рассмотрим тензорные поля кручения $\overline{T}$ и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если* $\overline{T}^1$ *и* $\overline{T}^2$ *— тензорное поле кручения связности* $\overset{1}{\overline{\nabla}}$ *и* $\overset{2}{\overline{\nabla}}$, *а* $\overline{T}^P$ *— связности* $\overset{P}{\overline{\nabla}}$, *то*

$$\overline{T}_X Y = \frac{1}{2}\big(\overline{T}^1{}_X Y + \overline{T}^2{}_X Y + \overline{T}^P{}_X Y\big).$$

ТЕОРЕМА 6. *Если* R, $\overline{R}^1$, $\overline{R}^2$ *и* $\overline{R}^P$ *— тензорное поле кривизны связности* ∇, $\overset{1}{\overline{\nabla}}$, $\overset{2}{\overline{\nabla}}$ *и* $\overset{P}{\overline{\nabla}}$ *соответственно, то для любых векторных полей* X, Y *и* Z *на* M

$$\overline{R}_{XY}Z = h_X h_Y Z - h_Y h_X Z + \overline{R}^1_{XY}Z + \overline{R}^2_{XY}Z + \overline{R}^P_{XY}Z +$$

$$+\frac{1}{4}\big(J_1 R_{XY} J_1 Z + J_2 R_{XY} J_2 Z - P R_{XY} P Z - 5 R_{XY} Z\big).$$

Литература.

1. Ермолицкий А. А. Римановы многообразия с геометрическими структурами // Мн.: БГПУ, 1998. – 196 с.