УДК 517.5

Н.В. Гриб, *преподаватель кафедры алгебры и геометрии БГПУ*

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ СВЕРТКИ

Интегральные рациональные операторы, построенные В.Н. Русаком ([1; 2]), нашли широкое применение в теории рациональной аппроксимации ([3–5]). С их помощью были получены новые классы функций, на которых рациональная аппроксимация существенно выгоднее полиномиальной, и найдены точные порядки наилучших рациональных приближений. Аналогичные операторы сумматорного типа на прямой были построены Е.А. Ровбой [6], на окружности – В.Н. Русаком и Т.С. Мардвилко [7]. В настоящей работе сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена, построенные в [7], используются для аппроксимации функций, представимых в виде свертки ядра Вейля с функциями ограниченной вариации.

1. Сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена и их свойства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}, 0 \le |\alpha_k| < 1$ – заданная последовательность комплексных чисел, кроме того, еще n чисел взяты равными нулю. Через

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k} z} = z^n \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k} z}$$

обозначим произведение Бляшке по этой системе параметров. Уравнение $\pi_n^3(z) - 1 = 0$ имеет $6n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = \overline{1,6n}$, расположенных на единичной окружности. Эти корни будем рассматривать в качестве узлов интерполирования.

Определим сумматорный рациональный оператор типа Валле Пуссена равенством

$$V_{4n-1}(u,\varphi) = \frac{1}{3\Phi_n'(u)} \sum_{j=1}^{6n} \varphi(u_j) l_j(u), \qquad (1.1)$$

где

$$l_j(u) = \frac{\sin^2\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right) - \sin^2 \frac{1}{2}\left(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)\right)}{\Phi_n'(u_j) \sin^2 \frac{u-u_j}{2}},$$

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n\left(e^{iu}\right) = $$

$$= n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{\left(1-|\alpha_k|\right)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u-\arg\alpha_k}{2}}. \qquad (1.2)$$

Как доказано в работе [7], операторы типа Валле Пуссена точны на константах, ограничены ($\|V_{4n-1}\|_{C_{2\pi}} \le 3$), интерполируют приближаемую функцию в узлах u_j. Выбор в настоящей работе дополнительных параметров, равных нулю, повлиял на функцию, являющуюся значением оператора (1.1), а также на точность операторов на рациональных функциях специального вида. Именно оператор (1.1) действует в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций и каждую функцию $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ отображает в рациональную функцию, являющуюся отношением тригонометрических многочленов степени не выше $4n-1$ и $2n$. Также оператор (1.1) точен на рациональных функциях вида

$$r_{4n}(e^{iu}) = \frac{p_{4n}(e^{iu})}{e^{inu} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{iu} - \alpha_k\right)\left(1 - \overline{\alpha_k} e^{iu}\right)} =$$

$$= \frac{p_{4n}(e^{iu})}{e^{2inu} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + |\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k| \cos\left(u - \arg\alpha_k\right)\right)},$$

где $p_{4n}(z)$ – алгебраический многочлен степени не выше $4n$, а следовательно, и на тригонометрических многочленах степени не выше n.

2. Класс функций с обобщенной производной ограниченной вариации. Рассмотрим функции, представимые в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r^\alpha(x-\tau) h(\tau) d\tau, \qquad (2.1)$$

$$r > 0, -\infty < \alpha < \infty,$$

функции $h(\tau)$ с ядром

$$D_r^\alpha(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(k\tau - \frac{\alpha\pi}{2}\right). \qquad (2.2)$$

Если $\alpha = r$, то функцию $h(\tau)$ принято называть производной порядка r по отношению к $f(x)$. При различных предположениях относительно $h(\tau)$ для функций (2.1) были найдены точные оценки наилучших полиномиальных и рациональных приближений ([3; 5; 8–10]).

Пусть $h(\tau)$ – функция ограниченной вариации на отрезке $[0,2\pi]$, $\mathrm{Var}\left(h(\tau),[0,2\pi]\right) \le 1$. Через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ обозначим класс функций, определенных формулой (2.1), через $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ – класс функций, представимых интегралом Стилтьеса

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_{r+1}^{\alpha+1}(x-\tau)dh(\tau), \qquad (2.3)$$

$$r > 0, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Под ядром Вейля в узком смысле понимаем функцию

$$D_r(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(k\tau - \frac{r\pi}{2}\right), \; r > 0,$$

соответствующие классы называем $W_{2\pi}^{r}V$ и $W_{2\pi}^{r}V_0$. Будем рассматривать также при положительных r и любых α ядра (2.2), называя их ядрами Вейля в широком смысле.

Точный порядок наилучших рациональных приближений на классах $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ и $W_{2\pi}^{r}V_0$ был найден В.Н. Русаком в работе [3].

Как известно из [3], функция $D_r^{\alpha}(\tau)$ аналитически продолжима с отрезка $[0,2\pi]$ во всю полосу $\Omega = \{z \mid 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 2\pi\}$, за исключением, может быть, точек $z = 0$ и $z = 2\pi$. Поэтому $D_{r,n}^{\alpha}(\tau)$ – остаток ряда Фурье ядра $D_r^{\alpha}(\tau)$,

$$D_{r,n}^{\alpha}(z) = D_r^{\alpha}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kz - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

также является аналитической в полосе Ω функцией.

Через $C_j = C_j(r)$ будем обозначать положительные константы, которые могут зависеть только от r. Константы, скрывающиеся далее за символом O, также зависят лишь от r.

Лемма 2.1. [3] *При* $r > 0$ *и любом действительном* α *в полосе* Ω *справедливо неравенство*

$$\left|D_{r+1,n}^{\alpha}(z)\right| \le \frac{C_1 e^{n|\mathrm{Im}\, z|}}{n^r}.$$

Лемма 2.2. [3] *При* $0 < r < 1$ *и действительных* τ, t *справедливо неравенство*

$$\left|D_{r+1,n}^{\alpha+1}(t) - D_{r+1,n}^{\alpha+1}(\tau)\right| \le C_2\left|\sin\left((t-\tau)/2\right)\right|^r.$$

Через K^r в дальнейшем обозначаем один из классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$, $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $W_{2\pi}^{r}V$, $W_{2\pi}^{r}V_0$.

3. Леммы о выборе полюсов. Далее речь пойдет о приближении функций класса K^r операторами (1.1). Опишем выбор полюсов операторов, при которых будет происходить оценка уклонения.

Рассмотрим сначала случай $0 < r < 1$. Для данного натурального n возьмем натуральное η такое, что $1 < \ln_\eta n = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{\eta\text{раз}} n \le e$. Определим числа b_n и Δ_μ равенствами

$$b_n = 2(2\pi+3)\left(1+\frac{39^2}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\ln_1 n}+\frac{1}{\ln_2 n}+\ldots+\frac{1}{\ln_\eta n}\right),$$

$$\Delta_\mu = \frac{b\ln_\mu^3 n}{n}.$$

Последовательность $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ равномерно ограничена, поэтому положим $b = \sup\limits_{2\le n<\infty} b_n$. Не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $n \ge b\ln^3 n$, а функция $h(\tau)$ непрерывна слева.

Сделаем разбиение отрезка $[0,2\pi]$ точками τ_k^1, $k = \overline{1, m_1+1}$, которые будем называть точками разбиения первого ранга,

$$0 = \tau_1^1 < \tau_2^1 < \ldots < \tau_{m_\mu+1}^1 = 2\pi,$$

$$\tau_{k+1}^1 = \max\left\{\tau : \tau_k^1 < \tau \le 2\pi,\; \tau - \tau_k^1 \le \Delta_1,\right. \qquad (3.1)$$

$$\left.\mathrm{Var}\left(h(x),\left(\tau_k^1,\tau_{k+1}^1\right)\right) \le \Delta_1\right\}.$$

Пусть построено $\mu-1$ разбиение. Расширяем его до μ-го разбиения добавлением новых точек деления так, что

$$0 = \tau_1^\mu < \tau_2^\mu < \ldots < \tau_{m_\mu+1}^\mu = 2\pi,$$

$$\tau_{k+1}^\mu = \max\left\{\tau : \tau_k^\mu < \tau \le 2\pi,\; \tau - \tau_k^\mu \le \Delta_\mu,\right. \qquad (3.2)$$

$$\left.\mathrm{Var}\left(h(x),\left(\tau_k^\mu,\tau_{k+1}^\mu\right)\right) \le \Delta_\mu\right\}.$$

Точки μ-го разбиения называем точками разбиения μ-го ранга. Будем вводить новые разбиения, пока число $\ln_\mu n$ больше единицы, то есть последним будет η-е разбиение.

В дальнейшем через ρ обозначаем число, равное $\rho = \rho(N) = \exp(-1/\sqrt{N})$. На каждом радиальном луче $\arg\theta = \tau_l^\mu$, $\mu = \overline{2,\eta}$, $l = \overline{0, m_\mu}$ разместим по $2N_\mu$, $N_\mu = \left[\left(39\ln_\mu n\right)^2/r^2+1\right]$ параметров α_k в точках

$$\begin{aligned}&\left(1-\Delta\tau_{l-1}^{\mu}\rho^{k}\right)e^{i\tau_l^{\mu}}, k=\overline{1,N_\mu},\\&\left(1-\Delta\tau_{l}^{\mu}\rho^{k}\right)e^{i\tau_l^{\mu}}, k=\overline{1,N_\mu}.\end{aligned}\qquad(3.3)$$

Также разместим по

$$N_1=\left[\left(15(r+1)\ln n\right)^2/r^2+1\right]$$

параметров α_k на каждом радиальном луче $\arg\theta=\tau_l^1$, $l=\overline{0,m_1}$ в точках

$$\left(1-0{,}5\rho^{k}\right)e^{i\tau_l^{1}}, k=\overline{1,N_1}.\qquad(3.4)$$

Приведем без доказательства ряд лемм, которые понадобятся в дальнейшем при оценке уклонения.

Лемма 3.1. *Пусть параметры* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$, $N\ge 25$ *расположены на радиальном луче по правилу* $\alpha_k=(1-h\rho^k)e^{i\tau}, 0<h\le 1$. *Тогда при* $h\rho^N\le 2\left|\sin\left((u-\tau)/2\right)\right|\le h$ *верна оценка*

$$\Phi_n'(u)\ge\frac{2\sqrt{N}}{5\left|\sin\dfrac{u-\tau}{2}\right|}.$$

Лемма 3.2. *Если* $f(u)\in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ *и* $0<r<1$, *то имеет место оценка*

$$\left|V_{4n-1}(u,f)-f(u)\right|=O\left(\left(\Phi_n'(u)\right)^{-\frac{r}{2}}\right).$$

Лемма 3.3. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *находится* n_η *точек разбиения последнего ранга, функция* $\Phi_n'(\theta)$ *на* $[a,b]$ *удовлетворяет неравенству* $\Phi_n'(\theta)\ge A_n/\left|\sin\left((u-\theta)/2\right)\right|$, $A_n\ge 1$, *точка* u *не принадлежит отрезку* $[a,b]$, *и* $d(u)=\min\left\{\left|\sin\left((u-a)/2\right)\right|,\left|\sin\left((u-b)/2\right)\right|\right\}$. *Тогда*

$$\sum_{a\le u_j\le b}\left|l_j(u)\right|=O\left(\frac{n_\eta}{A_n d(u)}\right).$$

Лемма 3.4. *Пусть* τ_k^μ *и* τ_{k+1}^μ *– соседние точки* μ*-го ранга,* $h=\tau_{k+1}^\mu-\tau_k^\mu$ *при* $2\le\mu<\eta$ *или* $h=1/2$ *при* $\mu=1$,

$$d(u)=\min\left\{\left|\sin\left(\left(u-\tau_k^\mu\right)/2\right)\right|,\left|\sin\left(\left(u-\tau_{k+1}^\mu\right)/2\right)\right|\right\}\ge 2h\rho^{N_\mu},$$

функция $\psi_n(w)$ такая, что $\left|\psi_n(w)\right|=O\left(e^{n|\operatorname{Im}w|}/n^r\right)$ и функция $\psi_n(w)/\sin\left((u-w)/2\right)$ аналитична в полосе $\tau_k^\mu\le\operatorname{Re}w\le\tau_{k+1}^\mu$ за исключением, может быть, точек $w=\tau_k^\mu$ и $w=\tau_{k+1}^\mu$. Тогда справедливо соотношение

$$\left|\sum_{\tau_k^\mu\le u_j<\tau_{k+1}^\mu}\psi_n(u_j)l_j(u)\right|=O\left(\frac{h\rho^{\frac{N_\mu}{3}}}{n^r d(u)^2}\right).$$

4. Оценки уклонений рациональных операторов в равномерной метрике

Теорема 4.1. *Если функция* $f(u)\in K^r$, *то при подходящем выборе параметров* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ *справедлива оценка*

$$\left\|V_{4n-1}(u,f)-f(u)\right\|=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для функций классов $W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ и $W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$. Начнем со случая $f(u)\in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $0<r<1$. На основании (1.1), (2.1), точности оператора V_{4n-1} на константах и тригонометрических многочленах запишем его уклонение от функции $f(u)$ в форме

$$f(u)-V_{4n-1}(u,f)=\frac{1}{3\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\left(f(u)-f(u_j)\right)l_j(u)=$$

$$=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\int_0^{2\pi}\left(D_{r+1}^{\alpha+1}(u-\tau)-D_{r+1}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)h(\tau)d\tau l_j(u)=$$

$$=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{j=1}^{6n}\left(\int_0^{u_j}+\int_{u_j}^{2\pi}\right)\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.$$

$$\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)h(\tau)d\tau l_j(u)=:S+S'.$$

Обозначим через $M_{k,\mu}=\{s\}$ множество значений индекса s, для которых концевые точки отрезков μ-го ранга принадлежат k-му отрезку $\mu-1$-го ранга. Тогда сумму S можно представить в виде:

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\Bigg(&\sum_{k=1}^{m_1}\sum_{\tau_k^1\le u_j<\tau_{k+1}^1}\int_0^{\tau_k^1}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.\\&\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)dh(\tau)l_j(u)+\\&+\sum_{\mu=2}^{\eta}\sum_{k=1}^{m_{\mu-1}}\sum_{s\in M_{k,\mu}}\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.\\&\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)dh(\tau)l_j(u)+\\&+\sum_{k=1}^{m_\eta}\sum_{\tau_k^\eta\le u_j<\tau_{k+1}^\eta}\int_{\tau_k^\eta}^{u_j}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.\\&\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)dh(\tau)l_j(u)\Bigg)=:S^1+\sum_{\mu=2}^{\eta}S^\mu+S^0.\end{aligned}\qquad(4.1)$$

Оценим сначала сумму S_1^μ, $\mu=\overline{2,\eta}$. Для точки u, в которой производится оценка уклонения, определим окрестность

$$\delta_\mu(u)=\left\{x:0\le x\le 2\pi,\left|\sin\frac{u-x}{2}\right|\le\right.$$
$$\left.\le\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln_{\mu-1}n}\right)^{\frac{4}{r}}=:d_\mu\right\},$$

состоящую из одного или двух отрезков. Пусть $S^\mu=S_1^\mu+S_2^\mu+S_3^\mu$, где S_1^μ берется по отрезкам $\mu-1$-го ранга, полностью принадлежащим $\delta_\mu(u)$, S_3^μ – по отрезкам, не имеющим общих точек с $\delta_\mu(u)$. Принимая во внимание лемму 2.2, условие (3.2) и ограниченность оператора V_{4n-1}, для S_1^μ получим

$$\left|S_1^\mu\right|\le\frac{C_2d_\mu^r}{3\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_{k+1}^{\mu-1}}\left|dh(\tau)\right|\left|l_j(u)\right|\le$$
$$\le\frac{C_2d_\mu^r}{3\Phi_n'(u)}\frac{b\ln_{\mu-1}^3n}{n}\sum_{j=1}^{6n}\left|l_j(u)\right|=\qquad(4.2)$$
$$=O\left(\frac{1}{n^{r+1}\ln_{\mu-1}n}\right).$$

Для оценки S_3^μ будем использовать (3.2), (3.3), леммы 2.1 и 3.4

$$\left|S_3^\mu\right|\le\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_k\sum_{s\in M_{k,\mu}}\int_{\tau_k^{\mu-1}}^{\tau_s^\mu}\left|\sum_{\tau_s^\mu\le u_j<\tau_{s+1}^\mu}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|\left|dh(\tau)\right|\le$$
$$\le\frac{C_9}{n}\frac{e^{-\frac{\sqrt{N_\mu}}{3}}}{n^r}\frac{b\ln_{\mu-1}^3n}{n}\sum_{s\in M_{k,\mu}}\max_{\lambda=s,s+1}\left(\frac{\Delta\tau_s^\mu}{\sin^2\frac{u-\tau_\lambda^\mu}{2}}\right)\le$$
$$\le\frac{C_{10}b\ln_{\mu-1}^3n}{n^{r+2}\ln_{\mu-1}^{\frac{13}{r}}n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_\mu}{\left(d_\mu+k\Delta_\mu\right)^2}\le\qquad(4.3)$$
$$\le\frac{C_{10}b}{n^{r+2}\ln_{\mu-1}^{\frac{10}{r}}n}\left(\frac{\Delta_\mu}{d_\mu^2}+\frac{1}{\Delta_\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\le$$
$$\frac{2C_{10}b}{n^{r+2}\ln_{\mu-1}^{\frac{10}{r}}n}\frac{\Delta_\mu}{d_\mu^2}=\frac{2C_{10}b^2\ln_\mu^3n}{n^{r+1}\ln_{\mu-1}^{\frac{2}{r}}n}=$$
$$=O\left(\frac{1}{n^{r+1}\ln_{\mu-1}n}\right).$$

На оценке S_2^μ останавливаться не будем, лишь укажем, как она может быть получена. Аналогично S_1^μ оценивается та часть суммы S_2^μ, которая берется по отрезкам μ-го ранга, полностью принадлежащим $\delta_\mu(u)$, аналогично S_3^μ – часть S_2^μ, берущаяся по отрезкам μ-го ранга, не имеющим общих точек с $\delta_\mu(u)$. Сумма по остальным отрезкам оценивается с помощью леммы 3.3. Таким образом, для S_2^μ верна оценка

$$\left|S_2^\mu\right|=O\left(\frac{1}{n^{r+1}\ln_{\mu-1}n}\right),$$

поэтому, учитывая (4.2) и (4.3), заключаем

$$\left|S^\mu\right|=O\left(\frac{1}{n^{r+1}\ln_{\mu-1}n}\right).\qquad(4.4)$$

Для суммы S^0 имеем неравенство

$$\left|S^0\right|\le\frac{2C_1}{3\pi\Phi_n'(u)n^r}\sum_{k=1}^{m_\eta}\sum_{\tau_k^\eta\le u_j<\tau_{k+1}^\eta}\int_{\tau_k^\eta}^{u_j}\left|dh(\tau)\right|\left|l_j(u)\right|\le$$
$$\le\frac{2C_1}{3\pi\Phi_n'(u)}\frac{b\ln_\eta^3n}{n}\sum_{j=1}^{6n}\left|l_j(u)\right|=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).\qquad(4.5)$$

Если для некоторой точки первого ранга $2\sin\left(\left(u-\tau_k^1\right)/2\right)\le n^{-\frac{2(r+1)}{r}}$, то, согласно леммам 3.2 и 3.1,

$$\left|V_{4n-1}(u,f)-f(u)\right|\le\frac{C_{11}}{\left(\Phi_n'(u)\right)^{\frac{r}{2}}}\le$$
$$\le C_{11}\frac{5\left|\sin\frac{u-\tau_k^1}{2}\right|^{\frac{r}{2}}}{2\sqrt{N_1}}=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).\qquad(4.6)$$

В противном случае, с учетом (3.1), (3.4), а также лемм 3.4 и 2.1 имеем оценку:

$$S^1\le\frac{1}{3\pi\Phi_n'(u)}\sum_{k=1}^{m_1}\int_0^{\tau_k^1}\left|\sum_{\tau_k^1\le u_j<\tau_{k+1}^1}\left(D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u-\tau)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-D_{r+1,n}^{\alpha+1}(u_j-\tau)\right)l_j(u)\right|\left|dh(\tau)\right|\le$$
$$\le\frac{C_{12}n^{\frac{4(r+1)}{r}}e^{-\frac{\sqrt{N_1}}{3}}}{n^{r+1}}m_1\le\frac{C_{12}(2\pi+3)}{bn^rn^{\frac{5(r+1)}{r}-\frac{4(r+1)}{r}}}=\qquad(4.7)$$
$$=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

На основании соотношений (4.4–4.7) окончательно заключаем, что для суммы S верна оценка:

$$|S| = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)\sum_{\mu=2}^{\eta}\frac{1}{\ln_{\mu-1} n} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Аналогичным образом можно показать, что для суммы S' справедлива такая же оценка. Общее количество параметров, затраченное на получение оценки уклонения (без учета тех n параметров, которые равны нулю), не превосходит n. Действительно,

$$m = m_1N_1 + 2m_2N_2 + \dots 2m_\eta N_\eta \le$$

$$\le n + 2\sum_{\mu=1}^{\eta}\frac{(2\pi+3)n}{b\ln_\mu^3 n}\left(\frac{39^2}{r^2}\ln_\mu^2 n + 1\right)\frac{1}{\ln_{\mu-1} n} \le$$

$$\le \frac{2n(2\pi+3)}{b}\left(\frac{39^2}{r^2}+1\right)\sum_{\mu=1}^{\eta}\frac{1}{\ln_{\mu-1} n} \le n.$$

Все остальные $n-m$ параметров можно взять равными нулю.

Таким образом, для случая $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$, $0 < r < 1$ теорема доказана. Если $r \ge 1$, то общая схема оценки уклонения остается такой же, но в деталях доказательство несколько упрощается благодаря большей гладкости функции. Для $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V$ доказательство также проводить не будем, лишь укажем, что для получения необходимой оценки уклонения в правой части (2.1) нужно произвести интегрирование по частям и воспользоваться уже полученным для $f(u) \in W_{2\pi}^{r,\alpha}V_0$ результатом.

В заключение отметим, что усеченные сумматорные рациональные операторы типа Валле Пуссена использовались В.Н. Русаком и И.В. Рыбаченко в работе [11] для приближения на отрезке функций, имеющих дробную производную в смысле Римана-Лиувиля ограниченной вариации. Однако при указанном расположении полюсов было получено уклонение порядка $\ln^2 n / n^{r+1}$, что множителем $\ln^2 n$ отличается от порядка наилучшего рационального приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русак, В.Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В.Н. Русак // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22. – № 3. – С. 375–380.
2. *Русак, В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак // Минск: Изд-во БГУ, 1979.
3. *Русак, В.Н.* Точные порядки наилучших рациональных приближений свертки ядра Вейля и функции из L_p / В.Н. Русак // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 315. – № 2. – С. 313–316.
4. *Пекарский, А.А.* Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке / А.А. Пекарский // Матем. сб., 133 (175). – № 1 (5) (1987). – С. 86–102.
5. *Ровба, Е.А.* Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле Пуссена / Е.А. Ровба // Мат. заметки. – 1993. Т. 53. – № 2. – С. 114–121.
6. *Русак, В.М.* Аб адным спосабе інтэрпаляцыі рацыянальнымі функцыямі / В.М. Русак, Т.С. Мардвілка // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2006. – № 2. – С. 13–15.
7. *Дзядык, В.К.* К вопросу о наилучшем тригонометрическом приближении кратно монотонных функций в метрике / В. К. Дзядык // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М., 1961. – С. 72–82.
8. *Стечкин, С.Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965. – № 20. – С. 643–648.
9. *Теляковский, С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними из рядов Фурье / С.А. Теляковский // Тр. ММО, 1961. – Т. 52. – С. 61–97.
10. *Русак, В.Н.* Об оценке уклонений интерполяционных рациональных операторов типа Валле Пуссена для дифференцируемых функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 9. – С. 123–130.

SUMMARY

Rational approximation of functions with fractional derivative in Weyl sense of bounded variation is researched. It is proved that summational rational operators of Vallee Poussin type on the specified class of functions implement an approximation of the same order as the best rational approximation. The choice of poles of operators at which the best order of deviation from approached function is reached is specified.

Поступила в редакцию 04.03.2012.