УДК 517.31

У.А. Шылінец, *кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматыкі БДПУ;*
А.В. Альшэўская, *студэнтка V курса фізічнага факультэта БДПУ;*
М.Г. Двурэчанская, *студэнтка V курса фізічнага факультэта БДПУ*

ІНТЭГРАЛЬНАЕ ВЫЯЎЛЕННЕ ФУНКЦЫЯНАЛЬНА-ІНВАРЫЯНТНЫХ ВЕКТАР-АНАЛІТЫЧНЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Функцыянальна-інварыянтныя рашэнні некаторых раўнанняў матэматычнай фізікі даследаваліся аўтарамі [1–15].

Як вядома [1–6], функцыянальна-інварыянтным рашэннем раўнання

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

называецца такое рашэнне $u=u(x,y)$, калі адвольная двойчы дыферэнцавальная функцыя $F(u)$ таксама з'яўляецца рашэннем гэтага раўнання.

Мэта дадзенага артыкула – рашэнне краявой задачы для аднаго класа функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый.

Асноўная частка. Нам спатрэбяцца некаторыя азначэнні.

Азначэнне 1. Будзем называць вектар-функцыю $\bar\sigma=\{u,v,w\}$ (u,v,w – камплексназначныя двойчы непарыўна дыферэнцавальныя функцыі ад каардынат x,y,z у некаторым абсягу G) вектар-аналітычнай [11–16], калі

$$div\bar\sigma=0, rot\bar\sigma=0. \tag{1}$$

Калі вектар-аналітычнай з'яўляецца вектар-функцыя $\bar\sigma=\{u,v,w\}$, тады вектар-аналітычнай будзем называць і гіперкамплексную функцыю $\sigma=u\varepsilon_1+v\varepsilon_2+w\varepsilon_3$, дзе $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ – база якой-небудзь лінейнай асацыятыўна-камутатыўнай алгебры з адзінкай над полем камплексных лікаў.

Сістэма (1) з'яўляецца некаторым абагульненнем вядомай сістэмы Кашы-Рымана на трохмерную прастору і прыватным стацыянарным выпадкам сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце

$$div(\bar E+i\bar H)=0,$$
$$rot(\bar E+i\bar H)=\frac{i}{c}\frac{\partial(\bar E+i\bar H)}{\partial t},$$
$$i^2=-1,\quad c=const,$$

калі меркаваць, што ў гэтай сістэме $\bar E+i\bar H=\bar\sigma=\{u,v,w\}$, дзе $u=u(x,y,z)$ і г. д. У сувязі з гэтым узнікае задача атрымаць клас рашэнняў сістэмы (1), для якіх магчыма пабудаваць інтэгральнае выяўленне.

Азначэнне 2. Гіперкамплексная функцыя

$$F=p(x,y,z)\varepsilon_1+q(x,y,z)\varepsilon_2+s(x,y,z)\varepsilon_3$$

называецца манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагеннай) [17] па другой гіперкамплекснай функцыі $\sigma=u\varepsilon_1+v\varepsilon_2+w\varepsilon_3$ у некаторым абсягу G, калі знойдзецца такая функцыя

$$\Psi=P(x,y,z)\varepsilon_1+Q(x,y,z)\varepsilon_2+R(x,y,z)\varepsilon_3,$$

што для ўсякіх пунктаў абсягу G маем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial x_k}, \tag{2}$$

дзе $k=1,2,3; x_1=x, x_2=y, x_3=z$.

Вядома, што сума, здабытак, дзель манагенных па σ функцый, а таксама функцыя, аналітычная ад σ, будуць манагеннымі па σ (калі, безумоўна, адзначаная дзель функцый існуе) [17] .

Азначэнне 3. Вектар-аналітычная функцыя $\sigma=u\varepsilon_1+v\varepsilon_2+w\varepsilon_3$ называецца функцыянальна-інварыянтнай, калі ўсякая функцыя F, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па σ, будучы запісанай у выглядзе

$$F=p\varepsilon_1+q\varepsilon_2+s\varepsilon_3,$$

таксама вызначае вектар-аналітычную функцыю $\bar F=\{p,q,s\}$, гэта значыць,

$$div\bar F=0, rot\bar F=0.$$

У дадзенай працы мы абмяжуемся выпадкам такой алгебры, у якой $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \lambda, \varepsilon_3 = \lambda^2$, прычым $\lambda^3 = 1$.

Пяройдзем да знаходжання функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы (1). Калі меркаваць $F = p + \lambda q + \lambda^2 s$, $\Psi = P + \lambda Q + \lambda^2 R$, $F_k = \dfrac{\partial F}{\partial x_k}$ і г. д., $\overline{T}_1 = \{u,v,w\}$, $\overline{T}_2 = \{w,u,v\}$, $\overline{T}_3 = \{v,w,u\}$, тады з роўнасці (2) атрымаем

$$p_k = Pu_k + Qw_k + Rv_k,\quad q_k = Pv_k + Qu_k + Rw_k,$$

$$s_k = Pw_k + Qv_k + Ru_k \quad (k = 1,2,3).$$

Таму маем

$$div\overline{F} = Pdiv\overline{T}_1 + Qdiv\overline{T}_2 + Rdiv\overline{T}_3, \tag{3}$$

а таксама

$$rot\overline{F} = Prot\overline{T}_1 + Qrot\overline{T}_2 + Rrot\overline{T}_3. \tag{4}$$

Заўважым, нарэшце, што

калі $F = \sigma$, то $\Psi = 1$, $P = 1, Q = 0, R = 0$;

калі $F = \lambda\sigma$, то $\Psi = \lambda$, $P = 0, Q = 1, R = 0$;

калі $F = \lambda^2\sigma$, то $\Psi = \lambda^2$, $P = 0, Q = 0, R = 1$.

Адсюль і з роўнасцей (3), (4) атрымаем наступную тэарэму.

Тэарэма. Вектар-функцыя $\overline{\sigma} = \{u,v,w\}$ будзе функцыянальна-інварыянтным рашэннем сістэмы (1) пры наступных неабходных і дастатковых умовах:

$$div\overline{T}_k = 0, rot\overline{T}_k = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{5}$$

або

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \\ &w_x + u_y + v_z = 0, \qquad (5') \\ &v_x + w_y + u_z = 0, \\ &u_x = v_z,\ u_y = v_x,\ u_z = v_y, \qquad (5'') \\ &v_x = w_z,\ v_y = w_x,\ v_z = w_y. \qquad (5''') \end{aligned}$$

Вынік.

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u_z = 0, \\ &v_x + v_y + v_z = 0, \\ &w_x + w_y + w_z = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

З раўнанняў (6) вынікае, што $u = f(t,\tau)$, $v = \varphi(t,\tau)$, $w = \Phi(t,\tau)$, $t = -x + y$, $\tau = y - z$, дзе f, φ, Φ – адвольныя дыферэнцавальныя па t і τ функцыі.

Тады сістэма $(5'')$ прыме выгляд $f_t = \varphi_\tau$, $f_t + f_\tau = -\varphi_t$, $-f_\tau = \varphi_t + \varphi_\tau$.

Лёгка праверыць, што апошняя сістэма раўназначная сістэме

$$f_t = \varphi_\tau,\quad -f_\tau = \varphi_t + \varphi_\tau, \tag{7}$$

а сістэма $(5''')$ раўназначная сістэме

$$\Phi_\tau = \varphi_t,\quad \Phi_t = -(\varphi_\tau + \varphi_t). \tag{8}$$

Відавочна, што вядомая ўмова інтэгравальнасці сістэмы (7) адносна f і сістэмы (8) адносна Φ мае выгляд

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau} = 0. \tag{9}$$

Лёгка праверыць дыферэнцаваннем, што дыферэнцыяльнае раўнанне (9) мае рашэннямі любыя аналітычныя функцыі выгляду:

$$f_1(t + \tau r_1),\ f_2(t + \tau r_2), \tag{9'}$$

дзе r_1, r_2 – камплексныя карані «характарыстычнага» раўнання $r^2 + r + 1 = 0$.

Падобна да таго, як мноства гарманічных функцый ёсць мноства рашэнняў раўнання Лапласа, мноства функцый выгляду $(9')$ утварае мноства рашэнняў раўнання (9).

Сістэмам (7) і (8) задавальняюць функцыі $\varphi = f_i(t + \tau r_i)$, $f = r_i f_i(t + \tau r_i)$ і $\varphi = f_i(t + \tau r_i)$, $\Phi = \dfrac{1}{r_i} f_i(t + \tau r_i)$ адпаведна ($i = 1,2; r_i$ – корань раўнання $r^2 + r + 1 = 0$; f_i – адвольная аналітычная функцыя ад $t + \tau r_i$).

Такім чынам, функцыя $\sigma = u + \lambda v + \lambda^2 w$ будзе функцыянальна-інварыянтнай вектар-аналітычнай функцыяй, калі $u = r f_1(t + \tau r)$, $v = f_1(t + \tau r)$, $w = \dfrac{1}{r} f_1(t + \tau r)$, дзе r – корань раўнання $r^2 + r + 1 = 0$, f_1 – адвольная аналітычная функцыя ад $t + \tau r$, $t = -x + y$, $\tau = y - z$, гэта значыць любая функцыя

$$F = p(x,y,z) + \lambda q(x,y,z) + \lambda^2 s(x,y,z), \tag{9''}$$

F-манагенная па σ (напрыклад, σ, σ^n, e^σ), таксама з'яўляецца рашэннем сістэмы (1).

Мноства рашэнняў сістэмы (1) (вектар-аналітычных функцый), вызначаемых функцыямі выгляду $(9'')$, можна лічыць агульным рашэннем сістэмы (1). Пры гэтым кожная функцыя F, F-манагенная па σ, таксама з'яўляецца функцыянальна-інварыянтнай вектар-аналітычнай функцыяй.

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай функцыя $\sigma = (r + \lambda + r^{-1}\lambda^2) f_1(t + r\tau)$ і функцыя F, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па σ, вызначаны на некаторай замкнутай двухмернай паверхні ∂G, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага (G – унутранасць паверхні ∂G).

Патрабуецца знайсці ў любым пункце $M(x,y,z) \in G$ значэнне функцыі F, манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава па σ, калі вядомы яе значэнні на паверхні ∂G.

Для рашэння сфармуляванай задачы выкарыстоўваем інтэгральнае выяўленне У.С. Фёдарава [18]. Калі

1) функцыя F – манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па σ у абсягу $D \supset G \cup \partial G$;

$$2) \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\sigma(N)}{\partial\xi_k}\right)^2 = 0, \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\sigma(N)}{\partial\xi_k^2} = 0 \qquad (10)$$

$$(N(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in D),$$

тады для кожнага пункта $M(x,y,z) \in G$ $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ маем

$$F(M) = \frac{1}{\omega_n\sigma_1(M)} \times$$
$$\times \int_{\partial G}\sum_{j=1}^{n}\left\{\alpha_j\left(\sigma_j\Psi^1 + \sigma_1\Psi^j\right) - \alpha_1\sigma_j\Psi^j\right\}FdS, \qquad (11)$$

дзе $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $n = 3$, пад знакам інтэграла $F = F(\mu)$, пункт $\mu(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in \partial G$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да ∂G,

$$\sigma_j = \frac{\partial\sigma(\mu)}{\partial\mu_j}, \ \Psi^j = \frac{\mu_j - x_j}{r^3} \ (j = 1,2,3),$$

$$r = \sqrt{(\mu_1 - x_1)^2 + (\mu_2 - x_2)^2 + (\mu_3 - x_3)^2}.$$

Заключэнне. Лёгка праверыць, што функцыянальна-інварыянтная вектар-аналітычная функцыя $\sigma = (r + \lambda + r^{-1}\lambda^2)f_1(t + r\tau)$ задавальняе ўмовам Фёдарава (10), і для функцыі F, манагеннай па σ, мае месца інтэгральнае выяўленне (11), пры дапамозе якога і рашаецца сфармуляваная вышэй краявая задача.

ЛІТАРАТУРА

1. *Соболев, С.А.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / С.А. Соболев // Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – Вып. 5. – С. 117–128.
2. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики / В.И. Смирнов.– М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 3. – Ч. 2. – С. 196–204.
3. *Еругин, Н.П.* О функционально-инвариантных решениях / Н.П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. –1948. – Вып. 15. – С. 101–134.
4. *Еругин, Н.П.* Функционально-инвариантные решения уравнений гиперболического типа с двумя неизвестными переменными / Н.П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. – 1949. – Вып. 16. – С. 142–166.
5. *Смирнов, М.М.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / М.М. Смирнов // Доклады АН СССР. – 1949. – № 6. – Т. 67. – С. 977–980.
6. *Кошляков, Н.С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – С. 128–139.
7. *Стельмашук, Н.Т.* Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н.Т. Стельмашук // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1967. – № 2. – Т. 7. – С. 431–436.
8. *Стельмашук, Н.Т.* О функционально-инвариантных решениях некоторых систем уравнений математической физики / Н.Т. Стельмашук // Rev. Roum. de Math. Pur. et Appl. – 1968. – № 9. – Т. 13. – P. 1455–1459.
9. *Стельмашук, Н.Т.* Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте / Н.Т. Стельмашук // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1974. – № 4. – С. 35–39.
10. *Пенчанский, С.Б.* О функционально-инвариантных решениях одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / С.Б. Пенчанский // Дифференциальные уравнения. – 1985. – № 8. – Т. 21. – С. 1449–1450.
11. *Стельмашук, Н.Т.* Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 1. – С. 44–47.
12. *Стэльмашук, М.Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1995. – № 1. – С. 85–88.
13. *Стельмашук, Н.Т.* Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. IV Всерос. науч. конф. с междунар. участием. – Самара: СамГТУ, 2007. – Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – С. 172–174.
14. *Стэльмашук, М.Т.* Рашэнне краявой задачы для аднаго класа функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Т.Л. Струнеўская // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2007. – № 1. – С. 23–26.
15. *Стэльмашук, М.Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Г.А. Андрэева // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2010. – № 2. – С. 17–19.
16. *Reinich, G.Y.* Analitic functions and math. physics / G.Y. Reinich // Bull. Amer. Math. Soc. –1931. – Vol. 37. – P. 689–714.
17. *Федоров, В.С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
18. *Федоров, В.С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 227–233.

SUMMARY

Solution of boundary value problem for functionally-invariant vector-analitic functions is obtained.

Паступіў у друк 31.01.2012.