МАТЭМАТЫКА

УДК 517.925.6

В.И. Мататов, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ;*
С.В. Пенталь, *магистрант кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ;*
Н.В. Реут, *ассистент кафедры высшей математики БГЭУ*

О ХАРАКТЕРЕ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА 2N-ГО ПОРЯДКА

Введение. Многие задачи прикладного характера моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений Гамильтона [1–3]. Часто указанные выше системы бывают автономными, то есть их правые части не зависят явно от независимой переменной.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, рассматриваемые как аналитические функции независимой комплексной переменной, характеризуются в основном особыми точками. Одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений является задача об изучении характера подвижных особых точек решений нелинейных ДУ и систем нелинейных ДУ. Под выражением «подвижные особые точки» подразумевают особые точки решений ДУ, положение которых зависит от начальных данных [4–9].

Основная часть. Пусть гамильтониан некоторой системы имеет вид

$$H = F\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right),$$

где F – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1},$$

$$\varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2},$$

$$\ldots,$$

$$\varphi_n = \frac{\psi_1 x_n + \psi_2 y_n}{\omega_1 x_n + \omega_2 y_n}.$$

Предположим, что хотя бы один из определителей $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}$, …, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. Соответствующая система Гамильтона будет такой:

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{-\Delta_1 x_1}{\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1\right)^2} & (1.1) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{-\Delta_2 x_2}{\left(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2\right)^2} & (1.2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_n} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{-\Delta_n x_n}{\left(\omega_1 x_n + \omega_2 y_n\right)^2} & (1.n) \\
\dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\Delta_1 y_1}{\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1\right)^2} & (2.1) \\
\dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\Delta_2 y_2}{\left(\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2\right)^2} & (2.2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dfrac{dy_n}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_n} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_n} \cdot \dfrac{\Delta_n y_n}{\left(\omega_1 x_n + \omega_2 y_n\right)^2}, & (2.n)
\end{cases}$$

где независимая переменная $t \in C$, $x_1 = x_1(t), \ldots, y_n = y_n(t) \in \hat{C} = C \cup \{\infty\}$.

Рассмотрим сначала случай, когда все определители $\Delta_k \left(k = \overline{1,n}\right)$ – ненулевые, то есть $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$.

Из уравнений (2.1) и (1.1) получаем, что $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{y_1}{x_1}$. Отсюда

$$\frac{y_1}{x_1} = C_1, \qquad (3)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Аналогично будем иметь соотношения

$$\frac{y_2}{x_2} = C_2, \ldots, \frac{y_n}{x_n} = C_n, \qquad (4)$$

где $C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

То есть, мы получили n первых интегралов системы (1.1)–(2.n).

Используя первые интегралы (3)–(4), уравнение (1.1) запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(C_1, C_2, \ldots, C_n) \cdot \frac{-\Delta_1}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2 x_1}, \qquad (5)$$

где

$$\Phi_1(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\right|_{\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 C_1}{\beta_1 + \beta_2 C_1}, \varphi_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 C_2}{\delta_1 + \delta_2 C_2}, \ldots, \varphi_n = \frac{\psi_1 + \psi_2 C_n}{\omega_1 + \omega_2 C_n}}.$$

В результате интегрирования ДУ (5) получим следующее:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-2\Delta_1 \Phi_1(C_1, C_2, \ldots, C_n)}{(\beta_1 + \beta_2 C_1)^2}(t - C_{n+1})}, \qquad (6)$$

где C_{n+1} – произвольная постоянная.

Используя первый интеграл $\frac{y_2}{x_2} = C_2$, после интегрирования уравнения (1.2) будем иметь

$$x_2 = \sqrt{\frac{-2\Delta_2 \Phi_2(C_1, C_2, \ldots, C_n)}{(\delta_1 + \delta_2 C_2)^2}(t - C_{n+2})}, \qquad (7)$$

где

$$\Phi_2(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 C_1}{\beta_1 + \beta_2 C_1}, \varphi_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 C_2}{\delta_1 + \delta_2 C_2}, \ldots, \varphi_n = \frac{\psi_1 + \psi_2 C_n}{\omega_1 + \omega_2 C_n}},$$

C_{n+2} – произвольная постоянная. Аналогично получаем, что

$$x_n = \sqrt{\frac{-2\Delta_n \Phi_n(C_1, C_2, \ldots, C_n)}{(\omega_1 + \omega_2 C_n)^2}(t - C_{2n})}, \qquad (8)$$

где

$$\Phi_n(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_n}\right|_{\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 C_1}{\beta_1 + \beta_2 C_1}, \varphi_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 C_2}{\delta_1 + \delta_2 C_2}, \ldots, \varphi_n = \frac{\psi_1 + \psi_2 C_n}{\omega_1 + \omega_2 C_n}},$$

C_{2n} – произвольная постоянная.

Из формул (6), (7) и (8) видим, что функции $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Поскольку $y_1 = C_1 x_1, y_2 = C_2 x_2, \ldots, y_n = C_n x_n$ (см. (3)–(4)), то и функции $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots,$ $y_n = y_n(t)$ также имеют подвижные точки ветвления второго порядка.

Рассмотрим случай, когда один из определителей равен нулю. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Пусть, например, выполняются следующие требования: $\Delta_1 = 0$, а все остальные определители не равны нулю (то есть $\Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$). В этом случае уравнения (1.1) и (2.1) приобретают вид: $\dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = 0$. Отсюда следует, что $x_1 = A, y_1 = B$, где A, B – произвольные постоянные. Остальные компоненты общего решения системы (1.1)–(2.n) (то есть функции $x_2 = x_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$) имеют подвижные точки ветвления второго порядка. Обоснование этого факта делается путем интегрирования исходной системы. При этом существенно используются первые интегралы (3)–(4).

Из всего вышеизложенного вытекает следующее утверждение.

Теорема. Если хотя бы один из определителей

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{vmatrix}, \; \ldots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю, то решения автономной системы Гамильтона (1.1)–(2.n) имеют в плоскости *C* подвижные точки ветвления второго порядка. Других подвижных особенностей решения исходной системы не имеют.

Замечание 1. Если все определители равны нулю, то есть $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, …, $\Delta_n = 0$, то исходная система принимает вид

$$(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)^T = (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)^T.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = C_1, \ldots, x_n = C_n, y_1 = C_{n+1}, \ldots, y_n = C_{2n},$$

где $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{2n}$ – произвольные постоянные.

Замечание 2. Пусть промежуточные аргументы гамильтониана таковы:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}, \ldots, \quad \varphi_n = \frac{\psi_1 x_n + \psi_2 y_n + \psi_0}{\omega_1 x_n + \omega_2 y_n + \omega_0},$$

причем $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$. С помощью линейного преобразования зависимых переменных $x_1 = X_1 + a, y_1 = Y_1 + b, \ldots,$ $x_n = X_n + p, y_n = Y_n + q$ свободные члены всех дробно-линейных функций уничтожаются, и мы получим гамильтониан вида

$$H = F\left(\frac{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1}{\beta_1 X_1 + \beta_2 Y_1}, \ldots, \frac{\psi_1 X_n + \psi_2 Y_n}{\omega_1 X_n + \omega_2 Y_n}\right).$$

Такой подход реализован в статьях [8–9].

Заключение. В статье рассмотрена автономная система Гамильтона 2n-го порядка вида

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n},$$

где $H = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, F – голоморфная функция своих аргументов, причем $\varphi_1 = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2}$, …, $\varphi_n = \dfrac{\psi_1 x_n + \psi_2 y_n}{\omega_1 x_n + \omega_2 y_n}$.

Доказано, что если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \omega_1 & \omega_2\end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения указанной выше системы Гамильтона имеют в плоскости *C* подвижные точки ветвления второго порядка. Других подвижных особых точек решения рассматриваемой системы не имеют.

Литература

1. *Айзерман, М.А.* Классическая механика / М.А. Айзерман. – М.: Наука, 1974. – 367 с.
2. *Мышкис, А. Д.* Математика. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
3. *Гантмахер, Ф. Р.* Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 2001. – 264 с.
4. *Айнс, Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 718 с.
5. *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
6. *Еругин, Н. П.* Проблема Римана / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
7. *Яблонский, А.И.* Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 3. – С. 468–478.
8. *Мататов, В.И.* К вопросу о подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона шестого порядка в случае, когда промежуточные аргументы гамильтониана – дробно-линейные функции / В.И. Мататов, Т.А. Любецкая, Н.В. Рабчун // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. науки и информатика. – 2010. – Вып. 18. – С. 38–40.
9. *Мататов, В.И.* О подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона двенадцатого порядка / В.И. Мататов, С.В. Пенталь, Н.В. Реут // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2011. – № 4. – С. 18–23.

Summary

Hamilton's autonomus systems of the 2n-th order of the form

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n},$$

where $H = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, *F is a holomorphic function if its arguments, and* $\varphi_1 = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{\gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2}{\delta_1 x_2 + \delta_2 y_2}$, …, $\varphi_n = \dfrac{\psi_1 x_n + \psi_2 y_n}{\omega_1 x_n + \omega_2 y_n}$ *are considered in the article. It is shown that if at least one of the determinants* $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \omega_1 & \omega_2\end{vmatrix}$ *is not equal to zero, then the solutions of the system under consideration have movable second-order points of branching. Solutions of the system don't have another mobile singular points.*

Поступила в редакцию 19.01.2012.