УДК 530.145.6

Е.М. Овсиюк, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики
МГПУ им. И.П. Шамякина;
В.В. Кисель, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и теоретической физики БГПУ;
В.М. Редьков, кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова
НАН Беларуси

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ И СПЕКТРЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Задача об определении уровней энергии частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1–3]. В работах [4–6] найдены точные решения уравнения Шредингера для скалярной частицы в магнитном поле на фоне пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, сферическом пространстве Римана и гиперболическом пространстве Лобачевского. Анализ соответствующих систем в рамках классической механики выполнен в [7–9]. В работах [10–11] определены решения уравнения Дирака в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского и Римана. В [12–13] построены решения для уравнения Даффина–Кеммера для векторной частицы в плоском пространстве. В настоящей работе рассмотрен новый способ построения трех линейно независимых типов решений.

Исходное волновое уравнение Даффина–Кеммера для векторной частицы в тетрадной форме имеет вид [12–13]:

$$\{i\beta^{\alpha}(x)\left(\partial_{\alpha}+B_{\alpha}-i\frac{e}{\hbar}A_{\alpha}\right)-\frac{Mc}{\hbar}\}\Psi=0,$$
$$\beta^{\alpha}(x)=\beta^{a}e^{\alpha}_{(a)}(x),\; B_{\alpha}(x)=\frac{1}{2}J^{ab}e^{\beta}_{(a)}\nabla_{\alpha}e_{(b)\beta}. \qquad (1.1)$$

В (1.1): $e^{\alpha}_{(a)}(x)$ – тетрада; β^{a} – 10×10 – матрицы Даффина–Кеммера; $J^{ab}=(\beta^{a}\beta^{b}-\beta^{b}\beta^{a})$ – генераторы 10-мерного представления группы Лоренца, отвечающего набору из вектора и тензора второго ранга; A^{α} – вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля в цилиндрической системе координат; M – масса частицы (в дальнейшем будем использовать сокращение $Mc/\hbar \Rightarrow M$). Однородному постоянному магнитному полю $\vec{B}=(0,0,B)$ можно сопоставить вектор-потенциал

$$\left(A^{\alpha}\right)=\left(0,\vec{A}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}\right)=\frac{B}{2}\left(0,-x^{2},x^{1},0\right).$$

В цилиндрической системе координат он имеет особенно простой вид:

$$\left(x^{\alpha}\right)=\left(ct,r,\phi,z\right),\; dS^{2}=$$
$$=c^{2}dt^{2}-dr^{2}-r^{2}d\phi^{2}-dz^{2}, \qquad (1.2)$$
$$A_{0}=0, A_{r}=0, A_{\phi}=-\frac{Br^{2}}{2}, A_{z}=0.$$

Выбираем диагональную цилиндрическую тетраду:

$$e^{\alpha}_{(0)}=(1,0,0,0),\; e^{\alpha}_{(1)}=(0,1,0,0),$$
$$e^{\alpha}_{(2)}=\left(0,0.\frac{1}{r},0\right),\; e^{\alpha}_{(3)}=(0,0,0,1). \qquad (1.3)$$

С учетом явного вида тетрады (1.3) приходим к следующему представлению уравнения (1.1):

$$\left[i\beta^{0}\partial_{0}+i\beta^{1}\partial_{r}+i\frac{\beta^{2}}{r}\left(\partial_{\phi}+\frac{ieB}{2\hbar}r^{2}+J^{12}\right)+\right.$$
$$\left.+i\beta^{3}\partial_{z}-M\right]\Psi(t,r,\phi,z)=0. \qquad (1.4)$$

Далее для краткости будем использовать обозначение $(eB/2\hbar)\Rightarrow B$. При разделении переменных в уравнении потребуется явный вид матриц β^a. Наиболее удобным является их выбор в циклическом базисе. Выпишем явный вид этих матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей 1 – 3 – 3 – 3:

$$\beta^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_i \\ -e_i^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_i & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь e_i, τ_i определяются следующим образом

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i,0,0\right), \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,0,1\right), \; e_3 = \left(0,1,0\right),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Входящая в уравнение (1.4) матрица J^{12} диагональна и равна

$$J^{12} = \beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1 = -i\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3 \end{vmatrix} = -S_3.$$

Разделение переменных. Подстановку для волновой функции выбираем в виде (она отвечает диагонализации проекции импульса вдоль оси z и третьей проекции полного момента частицы):

$$\Psi = e^{-i\varepsilon t}e^{im\phi}e^{ikz}\begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix},$$

$$\left[\varepsilon\beta^0 + i\beta^1\partial_r - \frac{\beta^2}{r}\left(m + Br^2 - S_3\right) - M\right]\begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \vec{\Phi} \\ \vec{E} \\ \vec{H} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.1)$$

После необходимых вычислений приходим к 10 радиальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &-\hat{b}_{m-1}E_1 - \hat{a}_{m+1}E_3 - ikE_2 = M\Phi_0, \\ &-i\hat{b}_{m-1}H_1 + i\hat{a}_{m+1}H_2 + i\varepsilon E_2 = M\Phi_2, \\ &i\hat{a}_m H_2 + i\varepsilon E_1 - kH_1 = M\Phi_1, \\ &-i\hat{b}_m H_2 + i\varepsilon E_3 + kH_3 = M\Phi_3, \end{aligned} \qquad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &\hat{a}_m\,\Phi_0 - i\varepsilon\,\Phi_1 = M\,E_1, \\ &-i\varepsilon\,\Phi_2 - ik\Phi_0 = M\,E_2, \\ &\hat{b}_m\,\Phi_0 - i\varepsilon\,\Phi_3 = M\,E_3, \\ &-i\hat{a}_m\Phi_2 + k\Phi_1 = MH_1, \\ &i\hat{b}_{m-1}\Phi_1 - i\hat{a}_{m+1}\Phi_3 = M\,H_2, \\ &i\hat{b}_m\Phi_2 - k\Phi_3 = MH_3. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

В (2.2), (2.3) для сокращения используются обозначения

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r}\right), \quad \hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \frac{m + Br^2}{r}\right). \qquad (2.4)$$

Определим функции

$$F = k\Phi_0 + \varepsilon\Phi_2, \; G = \varepsilon\Phi_0 + k\Phi_2,$$
$$f_1 = kE_1 + i\varepsilon H_1, \; f_3 = kE_3 - i\varepsilon H_3,$$
$$g_1 = \varepsilon E_1 + ikH_1, \; g_3 = \varepsilon E_3 - ikH_3. \qquad (2.5)$$

Преобразования, обратные (2.5), имеют вид:

$$\Phi_0 = -\frac{1}{\varepsilon^2 - k^2}\left(kF - \varepsilon G\right),$$
$$\Phi_2 = -\frac{1}{\varepsilon^2 - k^2}\left(-\varepsilon F + kG\right),$$
$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon^2 - k^2}\left(-kf_1 + \varepsilon g_1\right),$$
$$H_1 = \frac{i}{\varepsilon^2 - k^2}\left(-\varepsilon f_1 + kg_1\right),$$
$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon^2 - k^2}\left(-kf_3 + \varepsilon g_3\right),$$
$$H_3 = \frac{i}{\varepsilon^2 - k^2}\left(-\varepsilon f_3 + kg_1\right). \qquad (2.6)$$

С учетом (2.5) система 10 радиальных уравнений (2.2), (2.3) распадается на системы четырех и шести независимых уравнений:

$$\begin{aligned} &-\hat{b}_{m-1}f_1 - \hat{a}_{m+1}f_3 + i\left(\varepsilon^2 - k^2\right)E_2 = MF, \\ &-iF = ME_2, \; \hat{a}_m F = Mf_1, \; \hat{b}_m F = Mf_3 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned}
&\hat{a}_m G - i\left(\varepsilon^2 - k^2\right)\Phi_1 = M g_1,\\
&\hat{b}_m G - i\left(\varepsilon^2 - k^2\right)\Phi_3 = M g_3,\\
&-\hat{b}_{m-1} g_1 - \hat{a}_{m+1} g_3 = MG,\\
&i\hat{a}_m H_2 + i g_1 = M\Phi_1,\\
&-i\hat{b}_m H_2 + i g_3 = M\Phi_3,\\
&i\hat{b}_{m-1}\Phi_1 - i\hat{a}_{m+1}\Phi_3 = M H_2 .
\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Найдем решения уравнений (2.7). Из (2.7) следует, что основная функция F удовлетворяет уравнению

$$\left\{\left(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m\right) + \left(M^2 - \varepsilon^2 + k^2\right)\right\} F = 0. \quad (2.9)$$

Используя равенство

$$\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{\left(m + Br^2\right)^2}{r^2}, \quad (2.10)$$

уравнение (2.9) можно представить в виде:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\left(m + Br^2\right)^2}{r^2} + \varepsilon^2 - k^2 - M^2\right\} F = 0. \quad (2.11)$$

Чтобы построить решения уравнений (2.8), введем в рассмотрение функции:

$$\begin{aligned}
&G_1 = G - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} H_2, \; G_2 = G + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} H_2,\\
&G_3 = g_1 - i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\Phi_1, \; G_4 = g_1 + i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\Phi_1, \quad (2.12)\\
&G_5 = g_3 - i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\Phi_3, \; G_6 = g_3 + i\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\Phi_3 .
\end{aligned}$$

Преобразования, обратные (2.12), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&G = \frac{1}{2}\left(G_1 + G_2\right),\\
&H_2 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\left(-G_1 + G_2\right),\\
&g_1 = \frac{1}{2}\left(G_3 + G_4\right),\\
&\Phi_1 = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\left(G_3 - G_4\right),\\
&g_3 = \frac{1}{2}\left(G_5 + G_6\right),\\
&\Phi_3 = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}\left(G_5 - G_6\right).
\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Нетрудно убедиться, что приведенная система функций G_i в силу (2.8) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\hat{a}_m G_1 = \left(M + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\right) G_4,\\
&\hat{a}_m G_2 = \left(M - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\right) G_3,\\
&\hat{b}_m G_1 = \left(M - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\right) G_5,\\
&\hat{b}_m G_2 = \left(M + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}\right) G_6,\\
&\hat{b}_{m-1} G_4 + \hat{a}_{m+1} G_5 = -M G_1,\\
&\hat{b}_{m-1} G_3 + \hat{a}_{m+1} G_6 = -M G_2 .
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

В свою очередь, из (2.14) следует, что функции G_1, G_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\left\{\left(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m\right) - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{M}\left(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m\right) + \left(M^2 - \varepsilon^2 + k^2\right)\right\} G_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$\left\{\left(\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m + \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m\right) + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{M}\left(\hat{b}_{m-1}\hat{a}_m - \hat{a}_{m+1}\hat{b}_m\right) + \left(M^2 - \varepsilon^2 + k^2\right)\right\} G_2 = 0. \quad (2.16)$$

Используя равенство (2.10) и тождество

$$\hat{a}_{m+1}\hat{b}_m - \hat{b}_{m-1}\hat{a}_m = 2B, \quad (2.17)$$

уравнения (2.15), (2.16) можно представить в виде:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\left(m + Br^2\right)^2}{r^2} - 2B\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{M} + \varepsilon^2 - k^2 - M^2\right\} G_1 = 0, \quad (2.18)$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\left(m+Br^2\right)^2}{r^2}+\right.$$
$$\left.+2B\frac{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}{M}+\varepsilon^2-k^2-M^2\right\}G_2=0\,. \qquad (2.19)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к решению уравнений одного и того же типа:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\left(m+Br^2\right)^2}{r^2}+\lambda^2\right\}f(r)=0\,, \qquad (2.20)$$

где (см. (2.11), (2.18), (2.19))

$$\lambda^2=\begin{cases}\varepsilon^2-k^2-M^2\,,\\ \varepsilon^2-k^2-M^2-2B\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}{M}\,,\\ \varepsilon^2-k^2-M^2+2B\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}{M}\,.\end{cases} \qquad (2.21)$$

Введем переменную $x=Br^2$. Параметр B без ограничения общности можно считать положительным. Уравнение (2.20) в новой переменной может быть задано как

$$x\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{df}{dx}-\left(\frac{m^2}{4x}+\frac{x}{4}+\frac{m}{2}-\frac{\lambda^2}{4B}\right)f=0\,. \qquad (2.22)$$

Его решение ищем в виде $f=x^Ae^{-Cx}g(x)$. Выбираем $A=+|m|/2$, $C=+1/2$. В этом случае уравнение для функции $g(x)$ определяется следующим образом:

$$x\frac{d^2g}{dx^2}+\left(|m|+1-x\right)\frac{dg}{dx}-$$
$$-\left[\frac{1+m+|m|}{2}-\frac{\lambda^2}{4B}\right]g=0\,. \qquad (2.23)$$

Последнее является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$xg''+(\gamma-x)g'-\alpha g=0\,,$$
$$\alpha=\frac{1+m+|m|}{2}-\frac{\lambda^2}{4B}\,,\ \gamma=|m|+1\,. \qquad (2.24)$$

Условием сведения гипергеометрического ряда к полиному является равенство $\alpha=-n$. Это приводит к правилу квантования параметра λ^2:

$$\lambda^2=4B\left(n+\frac{1+m+|m|}{2}\right). \qquad (2.25)$$

Учитывая (2.21), (2.26), получаем три типа спектров энергии:

$$\varepsilon^2=M^2+k^2+4B\left(n+\frac{1+m+|m|}{2}\right),$$

$$\sqrt{\varepsilon^2-k^2}=\frac{B+\left\{B^2+M^2\left[M^2+4B\left(n+\dfrac{1+m+|m|}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{M}\,,$$

$$\sqrt{\varepsilon^2-k^2}=\frac{-B+\left\{B^2+M^2\left[M^2+4B\left(n+\dfrac{1+m+|m|}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{M}\,.$$

Они отвечают линейно независимым типам решений исходного волнового уравнения.

Таким образом, в рамках подхода Даффина–Кеммера в цилиндрических координатах и тетраде построены три линейно независимых типа решений. В каждом случае найден спектр энергии частицы.

Литература

1. *Rabi, I. I.* // Ztshr. Phys. – 1928. – Bd. 49. – P. 507–511.
2. *Landau, L.* // Ztshr. Phys. – 1930. – Bd. 64. – S. 629–637.
3. *Plesset, M.S.* // Phys.Rev. – 1931. – № 12. – P. 1728–1731.
4. *Bogush, A.A.* / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11. № 4. – P. 403–416.
5. *Богуш, А.А.* / А.А Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53. – № 2. – С. 45–51.
6. *Богуш, А.А.* / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 2. – С. 57–63.
7. *Kudryashov, V.V.* / V.V. Kudryashov, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // AP Conference Proceedings. – Vol. 1205. – P. 120–126 (2010); Eds. Remo Ruffini and Gregory Vereshchagin.
8. *Кудряшов, В.В.* / В.В. Кудряшов, Ю.А. Курочкин, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Докл. НАН Беларуси. 2009. – Т. 53. – № 6. – С. 50–53.
9. *Kudryashov, V.V.* / V.V. Kudryashov, Yu. A. Kurochkin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // SIGMA, 004, 2010. – 34 p.
10. *Овсиюк, Е.М.* / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 47–54.

11. *Овсиюк, Е.М.* / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 95–101.
12. *Кисель, В.В.* / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 64–71.
13. *Овсиюк, Е.М.* // Квантовая механика в однородном магнитном поле: новые задачи / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков. – 2011. – Мозырь. – 232 с.

SUMMARY

In the frames of matrix Duffin–Kemmer formalism in cylindric coordinates and tetrad in the Minkowski space, there are constructed exact solutions of the quantum-mechanical wave equation for spin 1 particle in external homogeneous magnetic field. Three classes of linearly independent solutions have been separated, in each case the energy spectrum has been found.

Поступила в редакцию 27.01.2012.